ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Φεβρουάριος 2015)

ΕΜΠ - Τομέας Φυσικής - ΣΕΜΦΕ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

Μέρος Α:

Α.1: Τι είναι **Στατιστικό Μείγμα** κβαντικών καταστάσεων, πως σχετίζεται αυτό με τον πιθανοτικό χαρακτήρα που προκύπτει από τα **αξιώματα** της κβαντομηχανικής τα οποία να υπενθυμίσετε τηλεγραφικά. Επιπλέον, δείξτε ότι στην περίπτωση *καθαρής* κβαντικής κατάστασης έχουμε για τη μέση τιμή μιας ποσότητας $\widehat{A}$:

α) $\langle \widehat{A} \rangle = \langle \Psi | \widehat{A} | \Psi \rangle$

β) $\langle \widehat{A} \rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{A}\}$

Α.2: Δείξτε ότι για **οποιονδήποτε** τελεστή πυκνότητας $\widehat{\rho}$ ισχύει η σχέση

$$Tr\{\widehat{\rho}^2\} \leq 1$$

Πότε ισχύει η ισότητα ;

Α.3: Δείξτε ότι με δεδομένο τον ορισμό του $\widehat{\rho}$ για τις κατανομές ισορροπίας και τον ορισμό της εντροπίας συναρτήσει του $\widehat{\rho}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$S = k\ln(Z) - k\sum_i \lambda_i \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \lambda_i}$$

$$dS = k\sum_i \lambda_i d\langle \widehat{X}_i \rangle$$

Από την τελευταία σχέση σχολιάστε το φυσικό νόημα των πολλαπλασιαστών *Lagrange* και την **προσθετικότητα** των φυσικών ποσοτήτων στις οποίες αντιστοιχούν.

Α.4: Η συνάρτηση επιμερισμού Z ενός συστήματος ταυτόσημων σωματιδίων δίνεται από τη σχέση

$$Z = \prod_q \left(1 \pm e^{-\beta(E_q-\mu)}\right)^{\pm 1}$$

όπου το (+) είναι για **Φερμιόνια** και το (-) για **Μποζόνια**. Να βρείτε (παραθέτοντας τις πράξεις) το μέσο αριθμό σωματιδίων $f_q = \langle n_q \rangle$ τα οποία βρίσκονται στην κατάσταση ενός σωματιδίου με ενέργεια E_q και για τις δύο περιπτώσεις.

Α.5: Εάν παρατηρείται **συνύπαρξη φάσεων** στο σημείο μιας **σιδηρομαγνητικής** μετάβασης φάσης, ποιά θα ήταν η μορφή της Ελεύθερης ενέργειας *Landau* ; Γιατί ;.

Α.6:

α) Ποιό πείραμα και πώς επέτρεψε στο *Landau* να ταυτοποιήσει την παράμετρο τάξεως της **υπεραγώγιμης** μετάβασης ;

β) Με δεδομένο ότι στους απλούς υπεραγωγούς πρόκειται για μια τυπική μετάβαση **δεύτερης τάξεως στην κλάση καθολικότητας του μέσου πεδίου**, ποιά η συμπεριφορά της ειδικής θερμότητας στο σημείο της μετάβασης ; Ποιά η συμπεριφορά της παραμέτρου τάξεως στο σημείο της μετάβασης ;

Μέρος Β:

Σύστημα αποτελείται απο δύο **ανεξάρτητα** σωματίδια, A και B. Το καθένα έχει δύο δυνατές ενεργειακές καταστάσεις $E_1^{A(B)}$ και $E_2^{A(B)}$ με αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|u_1^{A(B)}\rangle$ και $|u_2^{A(B)}\rangle$. Σε καθένα απο τους χώρους *Hilbert*, $\mathcal{E}_A$ και $\mathcal{E}_B$ αντίστοιχα ορίζεται η ορθοκανονική βάση $\{|\psi_\pm^{A(B)}\rangle\}$ απο τη σχέση

$$|\psi_\pm^{A(B)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|u_1^{A(B)}\rangle \pm |u_2^{A(B)}\rangle\Big]$$

Το σύστημα είναι **σε επαφή με ένα δοχείο θερμότητας θερμοκρασίας T**.

B.1: Στη **βάση** $\left\{|\psi_\pm^A\rangle \otimes |\psi_\pm^B\rangle\right\}$ να δώσετε τη μορφή πίνακα της ολικής χαμιλτονιανής $\widehat{H}_{AB} = \widehat{H}_A + \widehat{H}_B$, και του συνολικού τελεστή πυκνότητας $\widehat{\rho}_{AB}$.

B.2: Να γράψετε τον τελεστή πυκνότητας $\widehat{\rho}_{AB}$ του χώρου $\mathcal{E}_A \bigotimes \mathcal{E}_B$ στη βάση στην οποία η ολική χαμιλτονιανή $\widehat{H}_{AB} = \widehat{H}_A + \widehat{H}_B$ είναι διαγώνια. Συγκρίνετε τα **διαγώνια** στοιχεία πίνακα του $\widehat{\rho}_{AB}$ στη βάση αυτή με τα αντίστοιχα της προηγούμενης βάσης. Ποιό το **φυσικό νόημα** των διαγώνιων στοιχείων του $\widehat{\rho}_{AB}$ στις **δύο βάσεις** ; Ισχύει $\widehat{\rho}_{AB} = \widehat{\rho}_A \otimes \widehat{\rho}_B$ **και στις δύο βάσεις ;**

B.3: Αν υποθέσουμε ότι οι $\{|\psi_\pm^{A(B)}\rangle\}$ είναι ιδιοκαταστάσεις ενός ερμιτιανού τελεστή $\widehat{G}_{A(B)}$ με **αντίστοιχες ιδιοτιμές** $g_\pm^{A(B)}$ να βρείτε τις μέσες τιμές $\langle \widehat{G}_{AB}\rangle$ και $\langle \widehat{H}_{AB}\rangle$ (όπου $\widehat{G}_{AB} = \widehat{G}_A + \widehat{G}_B$) καθώς και την **εντροπία** του συστήματος. Το $\langle \widehat{H}_{AB}\rangle$ να υπολογισθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους.

B.4: Θεωρούμε ότι το σύστημα **δεν είναι πλέον σε επαφή με το δοχείο θερμότητας** (απολύτως μονωμένο πλέον). **α)** Μετράμε την ποσότητα $\widehat{G}_{AB}$ και βρίσκουμε την τιμή $g_-^A + g_-^B$. **Μετά τη μέτρηση** ποιός είναι ο **τελεστής πυκνότητας**, ποιά η **εντροπία** και ποιά η **εσωτερική ενέργεια** $\langle \widehat{H}_{AB}\rangle$; **β)** Αν το σύστημα **πρίν τη μέτρηση** ήταν σε στατιστικό μείγμα καταστάσεων τέτοιο ώστε η πιθανότητα να βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_+^A\rangle \otimes |\psi_+^B\rangle$ είναι 0.5 και η πιθανότητα να βρίσκεται στην $|\psi_-^A\rangle \otimes |\psi_-^B\rangle$ είναι 0.5, να βρείτε τον **τελεστή πυκνότητας**, την **Εντροπία** και τις μέσες τιμές $\langle \widehat{G}_{AB}\rangle$ και $\langle \widehat{H}_{AB}\rangle$.

Μέρος Γ:

Θεωρούμε ενα **τρισδιάστατο ισοτροπικό** αρμονικό ταλαντωτή που σε πρώτη προσέγγιση μοντελλοποιεί την ασθενή αλληλεπίδραση ενός ατόμου του κρυσταλλικού πλέγματος με τα υπόλοιπα άτομα του πλέγματος σε ένα στερεό. (Δίνεται η συνάρτηση επιμερισμού για το μονοδιάστατο ταλαντωτή).

α) Να υπολογίσετε τη Συνάρτηση επιμερισμού Z του στερεού.

β) Να υπολογίσετε την **εσωτερική ενέργεια** U, πως σχετίζεται με αυτή του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή ;

γ) Να υπολογίσετε τη **θερμοχωρητικότητα** $C = dU/dT$ του πλέγματος υποθέτοντας σε πρώτη προσέγγιση ότι αποτελείται από N ανεξάρτητους τρισδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές όπως οι παραπάνω (προσέγγιση *Einstein*). Παίρνοντας τα **όρια** $T \to 0$ και $T \to \infty$ δώστε ένα διάγραμμα $C(T)$ και σχολιάστε.