



**ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:**

α) (μον. 1) Να αποδειχθεί ότι οι  $x, x^4$  είναι γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις στο διάστημα  $-\infty < x < +\infty$ .

Μπορούν να αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της εξίσωσης  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  όπου  $p(x), q(x)$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $-\infty < x < +\infty$ , στο διάστημα (i)  $-2 < x < 2$ , (ii)  $2 < x < 4$ .

β) (μον. 1.25) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης  $(x-1)y'' - xy' + y = \sin x^2, x > 1$ , αν μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς  $y = e^x$ .

γ) (μον. 0.75) Αν  $a, b$  θετικές σταθερές και  $y_1(t), y_2(t)$  λύσεις της εξίσωσης  $ay'' + by = g(t), g(t) \neq 0$  να εξεταστεί αν ισχύει ότι  $y_1(t) - y_2(t) \rightarrow 0$ , του  $t \rightarrow \infty$ .

**ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:**

α) (μον. 0.75) Να βρεθούν τα ιδιάζοντα σημεία της διαφορικής εξίσωσης  $x(x+2)^2 y'' + xy' + 8y = 0$ . Να προσδιοριστούν για τα κανονικά ιδιάζοντα η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και το διάστημα σύγκλισης της λύσης σε μορφή δυναμοσειράς.

β) (μον. 0.5) Να αποδειχθεί ότι αν  $L(f(t)) = F(s), s > 0$  τότε  $L(e^{at} f(t)) = F(s-a), s > a$ .

γ) (μον. 0.75) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση

$$f(t) = t - e^2 \int_0^t b f(t-b) db.$$

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:**

α) (μον. 1) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς  $a$  για την οποία η δ. ε.  $(ye^{2xy} + x)dx + axe^{2xy}dy = 0$  είναι ακριβής και στη συνέχεια να βρεθεί η γενική λύση της.

β) (μον. 1) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε.  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \frac{x}{y^2} = 0, xy \neq 0$ .

γ) (μον. 0.5) Δίνεται η διαφορική εξίσωση  $y' = \frac{t-y}{2t+5y}$ . Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του  $ty$  επιπέδου

στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:** (μον. 2.5)

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x} \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}.$$