ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
1η Σειρά Ασκήσεων στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση

ακαδ. έτος 2013–14

1. Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^m\right)=\chi_{\mathbb{Q}}\,.$$

2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X. Αν $x_0\in X$, ορίζουμε το $\delta_{x_0}:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ με
$$\delta_{x_0}(E)=\begin{cases}1 & \text{αν το } x_0\in E,\\ 0 & \text{αν το } x_0\notin E\,.\end{cases}$$
Δηλαδή $\delta_{x_0}(E)=\chi_E(x_0)$. Δείξτε ότι το δ_{x_0}, γνωστό και σαν **μέτρο Dirac στο** x_0, είναι ένα μέτρο πιθανότητας. Ποια υποσύνολα του X έχουν μέτρο Dirac μηδέν;

3. Αν ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέτρο μηδέν, τότε το εσωτερικό του συνόλου είναι το κενό σύνολο. Ειδικά το μόνο ανοικτό σύνολο που έχει μέτρο μηδέν είναι το κενό σύνολο. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Δώστε παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που ενώ το εσωτερικό τους είναι το κενό σύνολο, τα σύνολα έχουν θετικό μέτρο.

4. Έστω A το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε $x\in A$ αν και μόνο αν στο δεκαδικό ανάπτυγμα του $x=0.a_1a_2a_3\cdots a_{2k+1}a_{2k+2}\cdots$ δεν είναι $a_{2k+1}=a_{2k+2}=2$ για κανένα $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Δείξτε ότι το A είναι σύνολο Borel και υπολογίστε το μέτρο Lebesgue του A.

5. Έστω $A\subset\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω $\alpha>0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε ανοικτό διάστημα I
$$m(A\cap I)\geq\alpha\ell(I)\,.$$
Δείξτε ότι $m(A^c)=0$.
<u>*Εφαρμογή*</u>. Έστω $A\subset(0,1)$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και έστω $\alpha>0$. Υποθέτουμε ότι αν $0\leq a<b\leq 1$, τότε $m(A\cap(a,b))\geq\alpha(b-a)$. Τότε $m(A)=1$.

6. Έστω $E\subset\mathbb{R}$ με $m^*(E)<+\infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, αν και μόνο αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια (K_n) ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και σύνολο Z μέτρου μηδέν με
$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n\cup Z\,.$$

7. (**Συνάρτηση κατανομής**) Ένα θετικό μέτρο μ στη Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ λέγεται **μέτρο Borel**. Υποθέτουμε ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\mu(\mathbb{R})<\infty$. Η **συνάρτηση κατανομής** του μέτρου μ, συμβολίζεται με F, ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με
$$F(x)=\mu((-\infty,x])\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$
Δείξτε ότι
   (α′) Η F είναι αύξουσα.
   (β′) Η F είναι από δεξιά συνεχής, δηλαδή $F(x+)=\lim_{t\to x^+}F(t)=F(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   (γ′) Η F είναι φραγμένη.
   (δ′) Είναι $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ και $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\mu(\mathbb{R})$.

Παράδοση των ασκήσεων έως 7/4/2014