ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επαναληπτική Εξέταση στη Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ
ΟΜΑΔΑ: Α

5 Νοεμβρίου, 2011

Θέμα 1. (α′) Να εξεταστεί αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$$

συγκλίνει και αν ναι να υπολογιστεί. (1,3 μον.)

(β′) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{3^n n^4}\,.$$

(1,2 μον.)

Θέμα 2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

(α′) Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$. (0,5 μον.)

(β′) Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ είναι ένα οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, να βρεθεί η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}$. (0,5 μον.)

(γ′) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$. (1,5 μον.)

Θέμα 3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 \sin(x/y) & \text{αν } y \neq 0\ , \\ 0 & \text{αν } y = 0\ . \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. (1,5 μον.)

Θέμα 4. (α′) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - y^2$ στο σημείο $M(5,-4)$ της υπερβολής $x^2 - y^2 = 9$, κατά την κατεύθυνση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο M. (1 μον.)

(β′) Θεωρούμε την επιφάνεια με εξίσωση $z = yf\left(\frac{x}{y}\right)$, όπου η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο (x_0, y_0, z_0), $y_0 \neq 0$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (1 μον.)

Θέμα 5. (α′) Έστω η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, με $f(x,y) = \varphi(y/x)$, όπου η $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2. Αν

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3}\,, \quad \text{για κάθε } (x,y) \in U,$$

να αποδειχθεί ότι η φ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\left(t^2-1\right)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = t\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

(1 μον.)

(β′) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πολλαπλασιαστών του Lagrange, να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ πάνω στη σφαίρα με εξίσωση $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $r > 0$.(1 μον.)

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες