$C_p = \sum_{j=1}^{k} \frac{j^p}{p!} a_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j$ $\qquad C_{p+1} := \text{[illegible]}$

$C_0 = \rho(1)$

$C_1 = \rho'(1) - \sigma(1)$

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Διδάσκοντες: Γ. Παπαγεωργίου Ι. Κολέτσος **Φεβρουάριος 2003**

Α- ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -2y'' - y' - 2y.$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Εν συνεχεία το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια.

β) Να δειχθεί ότι η πολυβηματική μέθοδος 3ης τάξης της μορφής:

$$y_{n+3} = -4(3a+1)y_{n+2} + (12a+5)y_{n+1} + h[(7a+4)f_{n+2} + (4a+2)f_{n+1} + a f_n],$$

είναι μηδενικά ευσταθής όταν $-\frac{1}{2} < a \le -\frac{1}{3}$.

2. α) Δίνεται η μέθοδος **(RK)** της μορφής:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$
$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$
$$k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2)$$

Να υπολογίσετε το πολυώνυμο ευστάθειας της μεθόδου, εφαρμόζοντας την διαφορική εξίσωση μοντέλο, $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0\ (\neq 0)$, όπου λ είναι ένας πραγματικός και αρνητικός αριθμός.

β) Θεωρούμε την έμμεση μέθοδο Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad y(a) = y_0.$$

Ευστάθεια: Εμμεση: $(-\infty, 0)$, αριστερό ημιεπίπεδο

Τραπέζιο: " "

Να υπολογιστεί το διάστημα και το χωρίο ευστάθειας της μεθόδου, εφαρμόζοντας το πρόβλημα $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0\ (\neq 0)$, $\lambda < 0$. Πως ονομάζονται οι μέθοδοι με τα χαρακτηριστικά ευστάθειας της παραπάνω μεθόδου.

3. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$y' = -\frac{4}{3}y^2, \quad y(0) = 1,$$

και ζητάμε την προσέγγιση y_1 στο σημείο $x_1 = 0.2$, εφαρμόζοντας την έμμεση μέθοδο Τραπεζίου:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\}.$$

Να υπολογίσετε την μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση για την προσέγγιση της y_1, και εν συνεχεία τον επαναληπτικό τύπο της μεθόδου Newton, για την επίλυση της μη γραμμικής αλγεβρικής εξίσωσης. $\left(x_{n+1} = x_n - {f(x_n)}/{f'(x_n)}\right)$.

Υπολογίστε μία αρχική προσέγγιση $y_1^{(0)}$, χρησιμοποιώντας ένα βήμα της άμεσης μεθόδου Euler, και εν συνεχεία υπολογίστε μία αριθμητική τιμή για την y_1, εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο Newton.

Β- ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να περιγραφεί η μέθοδος Galerkin με συναρτήσεις βάσης πυραμίδες για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος Dirichlet

$$-\Delta u = f, \text{ στο } \Omega = (0,1)\times(0,1)$$
$$u = 0, \quad \text{στο } \Gamma \text{ συνορο του } \Omega$$

(Τριγωνισμός, συναρτήσεις πυραμίδες, ασθενής μορφή, προσεγγιστικές εξισώσεις, γραμμικό σύστημα, μορφή πίνακα).

2. Να υπολογισθούν τα στοιχεία a_{ij} και τα δεύτερα μέλη b_i του γραμμικού συστήματος $Ac = b$ που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με n συναρτήσεις βάσης στέγες στο ομογενές πρόβλημα που προκύπτει από το μη ομογενές πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών

$$-u'' + xu = 0, \text{ στο } (0,1)$$
$$u(0) = 0,\ u(1) = 1.$$

ΤΕΛΟΣ

Τα θέματα είναι ισοδύναμα ως προς την βαθμολογία

$$\int_0^1 (-u'' + \lambda u)\Phi\,dx = \int_0^1 f\Phi\,dx, \quad \forall \Phi \in C^1[0,1]$$

$$\int_0^1 (-u''\Phi + \lambda u\Phi)\,dx = \int_0^1 f\Phi\,dx \quad \text{<παραγοντική ολοκλ.>}$$

$$-u'\Phi\Big]_0^1 + \int_0^1 (u'\Phi' + \lambda u\Phi)\,dx = \int_0^1 f\Phi\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} -u'(1)\Phi(1) + u'(0)\Phi(0) + \int_0^1 (u'\Phi' + \lambda u\Phi)\,dx = \int_0^1 f\Phi\,dx \\ \text{γίνεται } u'(0) = u_0', \ u'(1) = u_1' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-u_1'\Phi(1) + u_0'\Phi(0) + \int_0^1 (u'\Phi' + \lambda u\Phi)\,dx = \int_0^1 f\Phi\,dx$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.45 ΩΡΕΣ