ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Διδάσκων: Γ. Παπαγεωργίου **Φεβρουάριος 2005**

<u>Θέμα 1:</u> (1 , 1.5) = 2.5 μονάδες

α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -2y'' - 2y' - 4y.$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Εν συνεχεία το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την **ευστάθεια**.

β) Δίνεται η μέθοδος ***Runge-Kutta*** **(RK)** της μορφής:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h/3\ ,\ y_n + h/3\, k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + h/3\ ,\ y_n + h/6\,(k_1 + k_2))$$

$$k_4 = f(x_n + h/2,\ y_n + h/8\,(k_1 + 3k_3))$$

$$k_5 = f(x_n + h,\ y_n + h/2\,(k_1 - 3k_3 + 4k_4))$$

Π

$h/6 + 2h/6 = 3h/6$

Να υπολογίσετε ότι το **πολυώνυμο ευστάθειας** της μεθόδου, εφαρμόζοντας την μέθοδο στην διαφορική εξίσωση μοντέλο, $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0\ (\neq 0)$, όπου λ πραγματικός και αρνητικός αριθμός, μπορεί να πάρει την μορφή $y_{n+1} = y_n\{1 + (h\lambda) + 1/2\,(h\lambda)^2 + 1/6\,(h\lambda)^3 + 1/24\,(h\lambda)^4 + 1/144\,(h\lambda)^5\}$.

Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει ώστε η μέθοδος να είναι **απόλυτα ευσταθής**.

<u>Θέμα 2:</u> (0.5 , 1.25, 1.25) = 3.0 μονάδες

α) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$y' = f(x, y),\ x \in [a, b],\ \ y(a) = y_0 \qquad (1)$$

και την μέθοδο k-βημάτων της μορφής: $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$ (2)

- Να ορίσετε το **1°** και **2° χαρακτηριστικό πολυώνυμο** που αντιστοιχεί στην (2).
- Αναφέρατε τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν ώστε η (2) να είναι **μηδενικά-ευσταθής** και **συνεπής** αντίστοιχα. $\rho(1) = 0$ $\rho'(1) = \sigma(1)$

β) Δίνεται η πολυβηματική μέθοδος 3ης τάξης της μορφής: $-1/2 \to -1/3$.

? υπό ευστ.

$$y_{n+3} + 4(3a+1)\,y_{n+2} - (12a+5)\,y_{n+1} = h[(7a+4)f_{n+2} + (4a+2)f_{n+1} + a\,f_n].$$

Να εξεταστεί για ποιες τιμές της παραμέτρου **α** η μέθοδος είναι **συνεπής**.

γ) Δίνεται η μέθοδος:

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + a\,y_n = \frac{h}{2}\{f_{n+2} + (1-a)f_{n+1} - a\,f_n\}.$$

Να υπολογιστεί η παράμετρος a, ώστε η μέθοδος να είναι **συγκλίνουσα**.

$-7/4 + 4 = -3/4 + 16/4$

$-1/2 + 1/4 = -2/4 + 1/4$

Θέμα 3: (1.25 , 0.75) = 2.0 μονάδες

Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u''-(1-x/5)u=x,\ x\in[1,3],\ h=0.5$$
$$u_0=u(1)=2,\ u_4=u(3)=-1 \quad , \qquad 3\times 3$$

- Να υπολογιστεί το γραμμικό σύστημα για την προσέγγιση της λύσης στα εσωτερικά σημεία που ορίζονται από την διαμέριση $x_i=ih$, αν εφαρμόσουμε την μέθοδο των **πεπερασμένων διαφορών**. $x_0=1$ $x_1=1.5$ $x_2=2.0$ $x_3=$ $x_4=3$
- Επιλύστε το γραμμικό σύστημα με όποιο τρόπο θέλετε για να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές της λύσης στα σημεία αυτά. (**Πράξεις με 3 δεκαδικά**).

(Χρήσιμος τύπος: $u''(x_i)\approx(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})/h^2$).

Θέμα 4: (1 μονάδα)

Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$-u''+\lambda u=f,\ x\in(0,1), \qquad u$$
$$u'(0)=u'_0,\ u'(1)=u'_1$$

Να δειχθεί ότι η ασθενής μορφή του προβλήματος,, για την εφαρμογή της μεθόδου **Galerkin,** δίνεται από την σχέση:

$$\int_0^1(u'\varphi'+\lambda u\varphi)\,dx=\int_0^1 f\varphi\,dx+u'_1\varphi(1)-u'_0\varphi(0),\ \forall\varphi\in C^1[0,1].$$

Θέμα 5: (1.5 μονάδες)

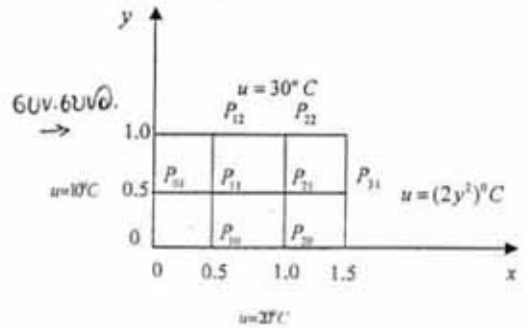
Μία ορθογώνια μεταλλική πλάκα μεγέθους $1.5m\times1.0m$, διαμερίζεται με ένα τετραγωνικό πλέγμα όπου $h=k=0.5$. Η θερμοκρασία κατά μήκος των ακμών είναι 10^oC, 20^oC, $(2y^2)^oC$, και 30^oC, όπως δείχνει το σχήμα. Η κατανομή της θερμοκρασίας στην πλάκα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση Poisson στις δύο διαστάσεις και είναι της μορφής

$$\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=4xy$$

Να υπολογιστεί η θερμοκρασία στα εσωτερικά σημεία της διαμέρισης.

(Χρήσιμοι τύποι: $\dfrac{\partial^2u_{i,j}}{\partial x^2}=\dfrac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$, $\dfrac{\partial^2u_{i,j}}{\partial y^2}=\dfrac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{k^2}$).

2×2



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3.15 ΩΡΕΣ

1 – 4.569

– 3.676 0.5 – 3.494