ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
6ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 24 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007, ΩΡΑ 12:00

(1) Να αποδειχθεί ότι αν $f(t,x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής και ορισμένη στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\phi(t)$ είναι λύση της εξίσωσης $x' = f(t,x)$ σ' ένα διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$, τότε η $\phi(t)$ μπορεί να επεκταθεί σ' ένα μέγιστο ανοικτό διάστημα ύπαρξης $J^* \supset J$. **(Βαθμοί: 1)**

(2) Να αποδειχθεί ότι το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών δέχεται μοναδική λύση, η οποία ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$:

$$y' = (x^2+1)^{-1} e^{-y^2 \sin^2 x}, \quad y(0) = 1. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 1)}$$

√ **(3)** Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t)$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ συνεχώς διαφορίσιμη και ορισμένη σε μία γειτονιά S του $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $V(0) = 0$, (ii) η $\dot V(x)$ είναι θετικά ορισμένη, και (iii) σε κάθε γειτονιά της αρχής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x, για το οποίο $V(x) > 0$, τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, είναι ασταθής. **(Βαθμοί: 1)**

√ **(4)** (α) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας του κρίσιμου σημείου για το ακόλουθο γραμμικό σύστημα: $x' = 3x - 2y$, $\quad y' = 4x - y$. Στη συνέχεια να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσεων του συστήματος. **(Βαθμοί: 0.6)**

(β) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας των κρίσιμων σημείων του μη γραμμικού συστήματος: $x' = x^2 + 3xy - 4x$, $y' = 2xy - 6y^2 + 4y$ με χρήση θεωρίας γραμμικοποίησης. **(Βαθμοί: 0.9)**

√ **(5)** Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης $x' = \lambda^2 + 10\lambda x + x^2$. Να γίνει περιγραφή των τροχιακών δομών αυτής για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης. **(Βαθμοί: 1.50)**

(6) Έστω το σύστημα

περίοδος $\frac{\pi}{2}$

$$x' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos^2 2t & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} + \sin^2 2t \end{pmatrix} x. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 1.0)}$$

Να μελετηθεί η συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος καθώς $t \uparrow \infty$.

√ **(7)** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 4e^t cost, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(Βαθμοί: 2.00)}$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!