ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 11 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007, ΩΡΑ 11.00

(1) ~~(α)~~ Έστω ϕ, f δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[0, T]$ και $k = k(\tau) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει Θ.3

$$\phi(t) \leq f(t) + \int_0^t k(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau.$$

Τότε έχουμε ότι,

$$\phi(t) \leq f(t) + \int_0^t k(\tau)\,f(\tau)\,\exp\left(\int_\tau^t k(s)\,ds\right)\,d\tau.$$

(β) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς μη-αρνητικές συναρτήσεις $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, τέτοιες ώστε

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)\,ds, \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

~~**(2)**~~ Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t)$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ συνεχώς διαφορίσιμη και ορισμένη σε μία γειτονιά S του $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: (i) $V(0) = 0$, (ii) η $\dot{V}(x)$ είναι θετικά ορισμένη, και (iii) σε κάθε γειτονιά της αρχής, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x, για το οποίο $V(x) > 0$, τότε η μηδενική λύση $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, είναι ασταθής. Θ.8

(3) Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών: 3

$$(i)\; y' = ln(1 + y^4),\; y(0) = 0, \quad (ii)\; y' = (x - y)^{4/5},\; y(10) = 10.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν αυτή υπάρχει.

(4) (α) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας του κρίσιμου σημείου για το ακόλουθο γραμμικό σύστημα: 8

(0,0)

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y, \\ y' &= -2x - y. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσεων του συστήματος.

(β) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος: f.g

$(0,0)$, $(-1,-\frac{1}{2})$ } στάσιμα

$$x' = -y + x + xy, \;\; y' = x - 2y,$$

με χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης.

(5) Να βρεθεί η γενική λύση του ακόλουθου γραμμικού μη ομογενούς συστήματος:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t.$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 10

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

R(t) q(t)