

# ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

## ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ «ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007, ΩΡΑ 10:30 - 12:30

(1) Με τη βοήθεια των Θεωρημάτων Υπαρξης και Μονοσήμαντου να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$(i) y' = xy^{-1}, \quad y(0) = 5, \quad (ii) y' = (x - y)^{3/4}, \quad y(5) = 10.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν αυτή υπάρχει.

(2) (α) Να βρεθεί η γενική λύση του ακόλουθου συστήματος:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t.$$

(β) Έστω, ο θεμελιώδης πίνακας  $Y(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$  του συστήματος  $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$ . Έστω, οι σταθεροί πίνακες  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  και  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Ναδειχθεί ότι ο  $CY(t)$ , είναι θεμελιώδης πίνακας του συστήματος ενώ ο  $DY(t)$  δεν είναι.

(3) (α) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας του κρίσιμου σημείου για το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y, \\ y' &= 4x - y. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσεων του συστήματος.

(β) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος:

$$x' = y + x^2, \quad y' = -x + y^2,$$

με χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης.

**ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ.**

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ΩΡΕΣ**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!**