Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης
14 Φεβρουαρίου 2003

Θέμα 1 (α) Δίνονται τα ακόλουθα υποσύνολα του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(x_1, x_2) : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\} \\
A_2 &= \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\} \\
A_3 &= \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{Q},\ x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \\
A_4 &= \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \\
A_5 &= \{(x_1, x_2) : x_2 = \lambda x_1 + c\} \qquad \text{(όπου } \lambda, c \text{ δοθέντες πραγματικοί).}
\end{aligned}$$

Να βρείτε ποια από αυτά είναι ανοικτά, ποια είναι κλειστά, ποια είναι συμπαγή και ποια είναι πυκνά. (Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας).

(β) Δίνονται οι ακόλουθοι μετρικοί χώροι:

$$((0,1), \rho_{|\,|}), \quad ([0, +\infty), \rho_{|\,|}), \quad (\mathbb{Q}, \rho_{|\,|}), \quad (\mathbb{Q}, \rho_d)$$

όπου $\rho_{|\,|}$ είναι η συνήθης και ρ_d η διακριτή μετρική. Να εξετάσετε ποιοι απο αυτούς είναι πλήρεις και ποιοι δεν είναι. (Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας).

Θέμα 2 (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$.
(i) Δώστε τον ορισμό του $\bar{A}$.
(ii) Δείξτε ότι το $X \setminus \bar{A}$ είναι ανοικτό.
(iii) Αν $x \in \bar{A} \setminus A$ δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $S(x, \varepsilon) \cap A$ είναι απειροσύνολο.

(β) Έστω X σύνολο ώστε ο (X, ρ_d) να είναι συμπαγής. Τι συμπεραίνετε για το X; (ρ_d είναι η διακριτή μετρική.)

Θέμα 3 (α) Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(i) Η f είναι συνεχής (ε - δ ορισμός)
(ii) Αν $U \subset Y$ ανοικτό τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(β) Αν (X, ρ) είναι μετρικός χώρος και $K \subset X$ συμπαγές, δείξτε ότι το K είναι κλειστό.

Θέμα 4 (α) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ). Θέτουμε $F_n = \{x_k : k \geq n\}$ για $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι $\operatorname{diam} F_n \to 0$ αν και μόνο αν η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία.

(β) Διατυπώστε το θεώρημα του Baire. Δείξτε ότι αν ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{int}(K_{n_0}) \neq \emptyset$. Με βάση αυτό δείξτε ότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Θέμα 5 Έστω F πεπερασμένο σύνολο $f_n : F \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ και $f : F \to \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι αν $f_n \to f$ κατά σημείο τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

(β) Αν $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων (δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$, $\forall x \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$) τότε υπάρχει $g : F \to \mathbb{R}$ και υπακολουθία $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $f_{k_n} \to g$ ομοιόμορφα.