

ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ στο Μάθημα ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΙΟΥΛΙΟΣ 2006

ΖΗΤΗΜΑ 1°

Δέκα μεταλλικοί σωλήνες με αντιδιαβρωτικό επίστρωμα τύπου Α, και οκτώ τύπου Β τέθηκαν σε διαβρωτικό περιβάλλον για το ίδιο χρονικό διάστημα. Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν το βαθμό διάβρωσής τους.

Τύπου Α	57	52	55	76	57	58	63	56	71	64
Τύπου Β	44	42	46	69	58	54	40	46		

Να εξεταστεί αν υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των δύο σωλήνων σε ότι αφορά το βαθμό διάβρωσής των i) μέσω της μεθόδου ανάλυσης διασποράς και ii) μέσω ενός απλού γραμμικού μοντέλου. Εκτός των στατιστικών ελέγχων να προσδιοριστεί και ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 (ii) (βαθμ. 2.5)

ΖΗΤΗΜΑ 2°

Να δείξετε ότι σε ένα γενικό γραμμικό μοντέλο που έχει εκτιμηθεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ισχύουν i) $\text{con}(\mathbf{e}, \hat{\mathbf{y}}) = 0$ και ii) $\mathbf{e}_i = \varepsilon_i - \sum_{j=1}^n h_{ij} \varepsilon_j$, με h_{ij} τα μη-διαγώνια στοιχεία του πίνακα προβολής Η.

Σε τι μας χρησιμεύουν αυτά τα δύο αποτελέσματα?

(βαθμ. 2.5)

ΖΗΤΗΜΑ 3°

Δείξτε ότι σε γραμμικό μοντέλο με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές X_1 και X_2 ισχύουν:

(i) $V(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 \left(T_1^2 (1 - r_{x_1 x_2}^2) \right)^{-1}$ και (ii) η δειγματική τυπική απόκλιση του $\hat{\beta}_j$ της X_1 είναι

$$S(\hat{\beta}_j) = \left(\frac{SSE}{n-3} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \{1 - r_{x_1 x_2}^2\} \right)^{-1/2}, \text{ όπου } r_{x_1 x_2} \text{ ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης μεταξύ}$$

X_1 και X_2 .

(Υπόδ. $X'X = \begin{bmatrix} n & n\bar{x}_1 & n\bar{x}_2 \\ \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} & \\ & & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix}$, $|X'X| = n(T_1^2 T_2^2 - T_{12}^2)$ και

$$T_j^2 = \sum_{i=1}^n (x_{ji} - \bar{x}_j)^2, \quad T_{12}^2 = \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) \quad \text{(βαθμ. 2.5)}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4°

Α) Δείξτε ότι στο απλό γραμμικό μοντέλο $E(Y_x) = \alpha + \beta x$ που έχει εκτιμηθεί με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, ισχύει $R^2 = r_{xy}^2$, όπου r_{xy} ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης των Y και X .

Β) Εστω k ο αριθμός των επεξηγηματικών μεταβλητών. Δείξτε ότι η ελεγχουσάνρτηση για την

προσαρμογή του μοντέλου γράφεται ως $F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)}$. Αν $n=21$, $k=5$ και $R^2=0.93$ και $\alpha=0.05$ τι

συμπεραίνουμε για τη σχέση μεταξύ y και τις 5 επεξηγηματικές μεταβλητές;

(βαθμ. 2.5)