

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
6ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 15 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2007, ΩΡΑ 08.30

(1) Έστω ϕ, f δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[0, T]$ και $k = k(\tau) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\phi(t) \leq f(t) + \int_0^t k(\tau) \phi(\tau) d\tau.$$

Τότε έχουμε ότι,

$$\phi(t) \leq f(t) + \int_0^t k(\tau) f(\tau) \exp\left(\int_\tau^t k(s) ds\right) d\tau.$$

(2) Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$(i) y' = 2x^2y^2, y(1) = -1, \quad (ii) y' = y^{1/3}, y(0) = 0.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν αυτή υπάρχει.

(3) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος:

$$x' = x^2 + 3xy - 4x, \quad y' = 2xy - 6y^2 + 4y,$$

με χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης.

(4) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} t e^{-2t}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9 ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ΩΡΕΣ

Κ Α Λ Η Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α !!!