Θεμέλια και Καινοτομίες της Κβαντικής Μηχανικής*

Α. Αραγεώργης
Τομέας Ανθρωπιστικών, Κοινωνικών Επιστημών και Δικαίου
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

> Θα έπρεπε να αρχίσω εκφράζοντας τη γενική στάση μου απέναντι στη σημερινή κβαντική θεωρία, με την οποία εννοώ την καθιερωμένη μη-σχετικιστική κβαντική μηχανική. Η θεωρία έχει, πράγματι, δυο ισχυρούς όγκους γεγονότων υπέρ της και μόνο ένα πράγμα εναντίον της. Πρώτο, υπέρ της είναι όλες οι θαυμαστές συμφωνίες που είχε η θεωρία με κάθε πειραματικό αποτέλεσμα μέχρι σήμερα. Δεύτερο, και για μένα σχεδόν εξίσου σημαντικό, είναι μια θεωρία εκπληκτικής και βαθιάς μαθηματικής ομορφιάς. Το μόνο πράγμα που μπορεί να ειπωθεί εναντίον της είναι ότι δεν βγάζει απολύτως κανένα νόημα!
>
> Roger Penrose (1986, σ. 129)

0. Προλεγόμενα

Αποκλειστικός στόχος του παρόντος είναι η σκιαγράφηση των θεμελίων της μη σχετικιστικής κβαντικής μηχανικής σε βαθμό που κρίνεται επαρκής για την πραγμάτευση των ερμηνευτικών προβλημάτων και των φιλοσοφικών προεκτάσεών της. Στην ενότητα 1 αναπτύσσονται οι βασικές έννοιες και παραδοχές που συγκροτούν το υπόβαθρο κάθε θεωρίας για τον φυσικό κόσμο, είτε κλασικής είτε κβαντικής. Στην ενότητα 2 περιγράφεται η δομή της κλασικής μηχανικής σωματιδίων με σκοπό να καταστούν σαφείς οι διαφορές με τη δομή της κβαντικής μηχανικής που περιγράφεται στην ενότητα 3. Η ενότητα 4 πραγματεύεται μερικές από τις κύριες καινοτομίες της κβαντικής μηχανικής που βρίσκονται στο επίκεντρο συναφών φιλοσοφικών συζητήσεων. Στο Παράρτημα 1 παρατίθενται στη μορφή ενός συνοπτικού πίνακα τα κύρια σημεία των ενοτήτων 2 και 3. Τέλος, στο Παράρτημα 2 παρουσιάζεται με τη μορφή τυπολογίου ο πυρήνας της κβαντομηχανικής θεωρίας του spin.

Η ανάπτυξη είναι εσκεμμένα απλουστευμένη από μαθηματικής σκοπιάς. Έτσι δεν υπάρχουν αναφορές σε σύνολα Borel, πεδία ορισμού μη φραγμένων τελεστών, τελεστές με συνεχές φάσμα, μη διαχωρίσιμους χώρους Hilbert, κ.ά. Η επιλογή αυτή δεν προέρχεται από την (εσφαλμένη) πεποίθηση ότι η μαθηματική αυστηρότητα δεν πρέπει να ενδιαφέρει τον / την φιλόσοφο της φυσικής. Πηγάζει απλώς από τη διαπίστωση ότι η κβαντική μηχανική θα είχε να μας παρουσιάσει δύσκολα ερμηνευτικά προβλήματα ακόμη και εάν ο μοναδικός χώρος Hilbert ήταν το $\mathbb{C}^2$!

1. Βασικές παραδοχές και έννοιες

Υποθέτουμε ότι ο κόσμος είναι τέτοιος ώστε διάφορα ενδεχόμενα να επιδέχονται, κάτω από ορισμένες συνθήκες, συγκεκριμένες τιμές πιθανότητας και να υφίστανται πιθανοκρατικές σχέσεις μεταξύ διαφόρων συμβάντων. Αυτή είναι η ελάχιστη προϋπόθεση για τη συγκρότηση μιας θεωρίας για τον κόσμο με ρεαλιστικές αξιώσεις.

---

* Σημειώσεις για το μάθημα *Φιλοσοφία της Φυσικής*, 7ο Εξάμηνο, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ.

Αν ο κόσμος δεν ενέχει κανένα στοιχείο τυχαιότητας, οι εν λόγω τιμές πιθανότητας (στο $[0,1]$) θα εκφυλίζονται σε τιμές αληθείας (στο $\{0,1\}$).

Ένα φυσικό *σύστημα* μπορεί να νοηθεί ως ο φορέας των πιθανοκρατικών σχέσεων μεταξύ συμβάντων – «ό,τι έχουν κοινό» τα συμβάντα, «ό,τι υπόκειται» των διαδικασιών. Τα ίδια τα συμβάντα περιγράφονται με τη βοήθεια της απόδοσης τιμών σε *παρατηρήσιμα μεγέθη* και η *κατάσταση* του συστήματος κωδικοποιεί τις πιθανότητες για τις δυνατές τιμές των παρατηρήσιμων μεγεθών. Με τον όρο ‘παρατηρήσιμο μέγεθος’ εννοούμε γενικώς κάθε συλλογή ιδιοτήτων («*τιμές* του παρατηρήσιμου μεγέθους») που είναι τέτοια ώστε (α) οτιδήποτε μπορεί να έχει κάποια από αυτές τις ιδιότητες μπορεί να έχει το πολύ μια από αυτές τις ιδιότητες και (β) καθεμία από αυτές τις ιδιότητες αναπαριστάνεται[1] από κάποιο πραγματικό αριθμό ή διατεταγμένη n-άδα πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, ο όρος ‘ορμή’ υποδηλώνει ένα παρατηρήσιμο μέγεθος με την έννοια ότι οτιδήποτε μπορεί να έχει καθορισμένη τιμή ορμής μπορεί να έχει το πολύ μια τέτοια τιμή που αναπαριστάνεται από ένα διάνυσμα (στο $\mathbb{R}^3$). Κανένα σύστημα δεν μπορεί να έχει την ίδια χρονική στιγμή *περισσότερες από μια διαφορετικές* τιμές ορμής και, ίσως, ένα (κβαντικό) σύστημα μπορεί να μην έχει *καμία* καθορισμένη τιμή ορμής σε κάποια χρονική στιγμή. Πάντως, η χρήση εδώ του όρου ‘παρατηρήσιμο μέγεθος’ δεν περιορίζεται «ανθρωποκεντρικά» μόνο σε ιδιότητες που *εμείς* μπορούμε να παρατηρήσουμε, άμεσα ή έμμεσα. Και μια επιπλέον διάκριση. Οι φυσικές θεωρίες συχνά περιλαμβάνουν παρατηρήσιμα μεγέθη, όπως η μάζα ή το φορτίο, που είναι ανεξάρτητα της εκάστοτε κατάστασης του συστήματος. Στο εξής θα αναφερόμαστε κυρίως σε εκείνα τα παρατηρήσιμα μεγέθη που εξαρτώνται κατά μη τετριμμένο τρόπο από την κατάσταση του συστήματος και υπόκεινται σε δυναμική εξέλιξη.

Είναι σαφές ότι η προηγούμενη παράγραφος περιέχει μόνο λίγο-πολύ αόριστες επεξηγήσεις όρων. Αυστηρότερα, οι όροι ‘σύστημα’, ‘παρατηρήσιμο μέγεθος’ και ‘κατάσταση’ μπορούν να εκληφθούν ως *πρωταρχικοί όροι* (που *δεν* επιδέχονται ορισμό) στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος.

Δεδομένου ενός συστήματος, υπάρχουν πολλά ενδεχόμενα που μπορούν να καθοριστούν: πού βρίσκεται το σύστημα ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, ποια είναι η ενέργειά του, κ.λπ. Μερικά από αυτά τα ενδεχόμενα καθορίζονται όταν κάποιο παρατηρήσιμο μέγεθος λάβει μια τιμή από ένα μεγάλο πλήθος δυνατών τιμών – το σύνολο των δυνατών τιμών μπορεί να είναι άπειρο, διακριτό ή συνεχές. Μερικά ενδεχόμενα, όμως, μπορούν να χαρακτηριστούν με μόνο δυο δυνατές τιμές τις οποίες μπορούμε να εκλάβουμε ως αληθοτιμές. Τέτοια «δίτιμα ενδεχόμενα» θα τα ονομάσουμε *ενδεχομενικότητες* και ανάγονται σε ενδεχόμενα που περιγράφονται από προτάσεις της μορφής: ‘Η τιμή του παρατηρησίμου μεγέθους A ανήκει στο σύνολο πραγματικών αριθμών Δ’ – συμβολικά και συντομογραφικά ‘(A,Δ)’.

Από τα παραπάνω, έπεται ότι κάθε κατάσταση s ενός συστήματος Σ ορίζει μια *στοχαστική συνάρτηση απόκρισης*

(1.1) $$\Pr_s : Obs(\Sigma)\times B(\mathbb{R}) \to [0,1] : (A,\Delta) \mapsto \Pr_s(A,\Delta),$$

όπου $Obs(\Sigma)$ το σύνολο των παρατηρησίμων μεγεθών που σχετίζονται με το Σ, $B(\mathbb{R})$ η άλγεβρα των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $\Pr_s(A,\Delta)$ η πιθανότητα να αληθεύει η ενδεχομενικότητα (A,Δ) όταν το Σ βρίσκεται στην κατάσταση s.

[1] Μετά από συμβατικές επιλογές συστημάτων μονάδων μέτρησης, κ.λπ.

Μια κατάσταση s λέγεται *μίγμα* των καταστάσεων s_1 και s_2 ακριβώς στην περίπτωση που υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $w_1, w_2 \geq 0$ τέτοιοι ώστε $w_1 + w_2 = 1$ και

(1.2) $$\Pr_s = w_1 \Pr_{s_1} + w_2 \Pr_{s_2} .$$

Μια κατάσταση s λέγεται *μικτή* αν και μόνο αν είναι μη τετριμμένο μίγμα άλλων διαφορετικών καταστάσεων s_1 και s_2 ($w_1 \neq 0, w_1 \neq 1$ και $\Pr_{s_1} \neq \Pr_{s_2}$). Μια κατάσταση λέγεται *καθαρή* αν και μόνο αν δεν είναι μικτή. Με απλά μαθηματικά,[2] αποδεικνύεται ότι αν η s είναι *μίγμα* των s_1 και s_2, τότε για κάθε ενδεχομενικότητα (A, Δ)

(1.3) $$\Pr_s(A, \Delta) = 1 \Rightarrow [\Pr_{s_1}(A, \Delta) = 1 \text{ ή } \Pr_{s_2}(A, \Delta) = 1].$$

Με αυτή την έννοια, το πλήθος των «βέβαιων ενδεχομενικοτήτων» είναι μέγιστο για τις καθαρές καταστάσεις. Έτσι μια καθαρή κατάσταση ενός συστήματος μπορεί να νοηθεί ως μια *μέγιστη εξειδίκευση της περιγραφής του συστήματος*.

2. Κλασική μηχανική

Ο χώρος S των καθαρών καταστάσεων («*φασικός χώρος*») ενός συστήματος N σωματιδίων στον 3-διάστατο ευκλείδειο χώρο είναι το $\mathbb{R}^{6N}$ και μια καθαρή κατάσταση αναπαριστάνεται από ένα σημείο $\left(q_1, ..., q_{3N}; p_1, ..., p_{3N}\right) \in S$ όπου $q_j, p_j (j = 1, ..., 3N)$ συντεταγμένες θέσης, ορμής αντίστοιχα. Η μαθηματική αναπαράσταση ενός παρατηρησίμου μεγέθους A είναι μια πραγματική συνάρτηση

(2.1) $$f_A : S \to \mathbb{R} : s \mapsto f_A(s) .$$

Για παράδειγμα, η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τον τύπο

(2.2) $$T(q_1, ...q_{3N}; p_1, ..., p_{3N}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{p_{3k-2}^2 + p_{3k-1}^2 + p_{3k}^2}{m_k} ,$$

όπου m_k η μάζα του $k^{οστου}$ σωματιδίου. Τέλος, η χρονική εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις Hamilton

(2.3) $$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, ..., 3N) ,$$

όπου $H = H(q_1, ..., q_{3N}; p_1, ..., p_{3N})$ η χαμιλτονιανή (για $\partial H / \partial t = 0$) . Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός αρμονικού ταλαντωτή σε 1-διάστατο χώρο έχουμε $H(q; p) = p^2 / 2m + m\omega^2 q^2 / 2$.

Είναι σημαντικό ότι ο προσδιορισμός της καθαρής κατάστασης ενός κλασικού συστήματος καθορίζει την αληθοτιμή όλων ενδεχομενικοτήτων που αφορούν το σύστημα: η ενδεχομενικότητα (A, Δ) αληθεύει όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση s αν και μόνο αν $f_A(s) \in \Delta$. Επομένως κάθε ενδεχομενικότητα (A, Δ) αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο

(2.4) $$S_{(A,\Delta)} = f_A^{-1}[\Delta] = \{s \in S : f_A(s) \in \Delta\}$$

[2] Αν $w_1, w_2 \geq 0$, $w_1 + w_2 = 1$, $w_1 x_1 + w_2 x_2 = 1$ και $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, τότε $x_1 = 1$ ή $x_2 = 1$.

του φασικού χώρου S. Έπεται ότι κάθε ενδεχομενικότητα (A,Δ) αντιστοιχεί σε ένα δίτιμο παρατηρήσιμο μέγεθος $\chi_{S_{(A,\Delta)}}: S \to \mathbb{R}$, όπου $\chi_{S_{(A,\Delta)}}$ η *χαρακτηριστική συνάρτηση* του συνόλου $S_{(A,\Delta)}$.[3]

Φυσικά, η αντιστοίχιση ενδεχομενικοτήτων σε υποσύνολα του φασικού χώρου δεν είναι 1-1. Για παράδειγμα, για ένα σύστημα που αποτελείται από ένα υλικό σημείο μάζας $1\,\mathrm{kg}$ σε 1-διάστατο ευκλείδειο χώρο, οι ενδεχομενικότητες «Η ορμή βρίσκεται μεταξύ $2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}$ και $4\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}$» και «Η ενέργεια βρίσκεται μεταξύ $2\,\mathrm{J}$ και $8\,\mathrm{J}$» αντιστοιχούν στο ίδιο υποσύνολο του φασικού χώρου. Ας ονομάσουμε *φυσικώς ισοδύναμες* δυο ενδεχομενικότητες αν και μόνο αν αντιστοιχούν στο ίδιο υποσύνολο του φασικού χώρου ενός κλασικού συστήματος. Η προκύπτουσα 1-1 αντιστοιχία μεταξύ προτάσεων που περιγράφουν κλάσεις φυσικής ισοδυναμίας κλασικών ενδεχομενικοτήτων και υποσυνόλων ενός φασικού χώρου κάνει τη λογική των πρώτων να έχει δομή *άλγεβρας Boole* (με την άρνηση, σύζευξη, διάζευξη προτάσεων να απεικονίζεται σε συμπλήρωμα, τομή, διάζευξη, αντίστοιχα, συνόλων).

Αφού η καθαρή κατάσταση του συστήματος προσδιορίζει την αληθοτιμή κάθε ενδεχομενικότητας, οι πιθανοκρατικοί συλλογισμοί για ένα κλασικό σύστημα απορρέουν μόνον από *άγνοια* («ελλιπή προσδιορισμό») της καθαρής κατάστασης του συστήματος. Στην κλασική μηχανική η έννοια της πιθανότητας έχει αμιγώς *γνωσιολογική* ερμηνεία. Έτσι η κλασική στατιστική μηχανική εισάγει συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας ρ πάνω στον φασικό χώρο

(2.5)
$$\rho(q_1,...,q_{3N};p_1,...,p_{3N}) \geq 0$$
$$\int ... \int_S \rho(q_1,...,p_{3N})dq_1...dp_{3N} = 1$$

και ορίζει

(2.6)
$$\Pr_s(A,\Delta) = \int ... \int_S \chi_{S_{(A,\Delta)}}(q_1,...,p_{3N})\,\rho(q_1,...,p_{3N})\,dq_1...dp_{3N}\,.$$

Δηλαδή, η πιθανότητα αλήθειας μιας ενδεχομενικότητας ισούται με την αναμενόμενη τιμή του αντίστοιχου παρατηρήσιμου μεγέθους.

Επιπλέον, αν S_1 και S_2 είναι οι χώροι των καθαρών καταστάσεων δυο κλασικών συστημάτων 1 και 2 αντίστοιχα, τότε ο χώρος των καθαρών καταστάσεων του σύνθετου συστήματος 1+2 είναι το *καρτεσιανό γινόμενο* $S_1 \times S_2$. Έπεται ότι οι καθαρές καταστάσεις των υποσυστημάτων προσδιορίζουν μονοσήμαντα την καθαρή κατάσταση του σύνθετου συστήματος.[4] Από την άλλη, αν το σύνθετο σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση, τότε σε καθαρή κατάσταση θα βρίσκεται και κάθε υποσύστημα ξεχωριστά.

---

[3] Η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_E ενός υποσυνόλου E ενός συνόλου Ω έχει πεδίο ορισμού το Ω και είναι τέτοια ώστε $\chi_E(x)=0$ αν $x \notin \Omega$ και $\chi_E(x)=1$ αν $x \in \Omega$.

[4] Δεδομένου, βεβαίως, ότι η κατάσταση καθενός από τα δυο υποσυστήματα περιλαμβάνει πληροφορίες που καθορίζουν τη θέση και τον προσανατολισμό του υποσυστήματος ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς.

3. Κβαντική μηχανική

Στην κβαντική μηχανική, η καθαρή κατάσταση ενός συστήματος αναπαριστάνεται από ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα $|\psi\rangle$ σε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$.[5] Με

(3.1) $$\hat{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

συμβολίζεται ο τελεστής προβολής πάνω στον 1-διάστατο υποχώρο του $\mathcal{H}$ που απαρτίζεται από διανύσματα της μορφής $c|\psi\rangle, c \in \mathbb{C}$. Επιπλέον, κάθε χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ επιδέχεται ορθοκανονική βάση $\{|e_j\rangle\}_{j=1,2,...}$:

(3.2) $$\langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} \text{ (σύμβολο Kronecker)}$$

$$|\psi\rangle = \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|\psi\rangle \text{ για κάθε } |\psi\rangle \in \mathcal{H}.$$

Κατά συνέπεια, αν $\hat{1}$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathcal{H}$, έχουμε

(3.3) $$\hat{1} = \sum_j |e_j\rangle\langle e_j| = \sum_j \hat{P}_{|e_j\rangle}$$

(«*ανάλυση της ταυτότητας*»).

Ένα παρατηρήσιμο μέγεθος A του συστήματος αναπαριστάνεται από έναν αυτοσυζυγή (γραμμικό) τελεστή $\hat{A}$ πάνω στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ των φυσικών καταστάσεων

(3.4) $$\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : |\psi\rangle \mapsto \hat{A}|\psi\rangle$$

$$\hat{A}\left(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle\right) = c_1\hat{A}|\psi_1\rangle + c_2\hat{A}|\psi_2\rangle$$

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger, \quad \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle^*$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Σύμφωνα με την *κβαντική σημασιολογία*,[6] τα δυνατά αποτελέσματα μέτρησης ενός παρατηρήσιμου μεγέθους A είναι οι ιδιοτιμές $a_1, a_2, ...$ του αντίστοιχου αυτοσυζυγούς τελεστή $\hat{A}$,

(3.5) $$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad n = 1, 2, ...,$$

όπου $|a_n\rangle$ το ιδιοδιάνυσμα του $\hat{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή a_n. Οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι πραγματικοί αριθμοί και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ορθογώνια. Εφόσον τα ιδιοδιανύσματα είναι κανονικοποιημένα, συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert. Αναλυτικά, για κάθε $m, n = 1, 2, ...$ και κάθε $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, έχουμε $a_m, a_n \in \mathbb{R}$, $a_m \neq a_n$ αν $m \neq n$,

(3.6) $$\langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn} \quad \text{και} \quad |\psi\rangle = \sum_n |a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle.$$

Τέλος, η

---

[5] Χρησιμοποιούμε, ως επί το πλείστον, τον συμβολισμό Dirac. Κατά σύμβαση, θεωρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle\bullet|\bullet\rangle$ είναι γραμμικό ως προς το δεύτερο όρισμα και συμβολίζουμε με z^* τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z.

[6] Η σημασιολογία μιας θεωρίας απαρτίζεται από τους κανόνες που αποδίδουν *νόημα* στις εκφράσεις της θεωρίας και *αληθοτιμές* στις προτάσεις της θεωρίας. Σε μια φυσική θεωρία η σημασιολογία συνδέει τον «φορμαλισμό» με την «εμπειρική πραγματικότητα» (παρατήρηση, πείραμα, κ.λπ.)

(3.7)
$$\sum_n |a_n\rangle\langle a_n| = \hat{1}$$
εκφράζει την ως προς A *ανάλυση της ταυτότητας*. Η σύζευξη των (3.5) και (3.6) δίνει την

(3.8)
$$\hat{A} = \sum_n a_n\, |a_n\rangle\langle a_n| = \sum_n a_n \hat{P}_{|a_n\rangle}$$
που εκφράζει την *φασματική αναπαράσταση* ή *ανάλυση* του αυτοσυζυγούς τελεστή $\hat{A}$.

Κατά την καθιερωμένη ερμηνεία, ένα παρατηρήσιμο μέγεθος ενός κβαντικού συστήματος έχει καθορισμένη τιμή όταν και μόνον όταν η κατάσταση του συστήματος αναπαριστάνεται από ιδιοδιάνυσμα του αντίστοιχου αυτοσυζυγούς τελεστή οπότε η καθορισμένη τιμή ισούται με την ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα αυτό. Αυτή η σημασιολογική αρχή ονομάζεται συνήθως *σύνδεσμος ιδιοκατάστασης-ιδιοτιμής* (eigenstate-eigenvalue link) και παίζει κεντρικό ρόλο στις ερμηνείες της κβαντικής μηχανικής.

Τώρα, η πιθανότητα μια μέτρηση του παρατηρήσιμου μεγέθους A στην κατάσταση $|\psi\rangle$ να δώσει ως αποτέλεσμα την ιδιοτιμή $a_n (n = 1,2,...)$ του αντίστοιχου αυτοσυζυγούς τελεστή $\hat{A}$ δίνεται από τον *στατιστικό αλγόριθμο Born*:

(3.9)
$$\Pr_{|\psi\rangle}(\mathrm{A},\{a_n\}) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_{|a_n\rangle}|\psi\rangle .$$
Έπεται ότι η πιθανότητα αληθείας της ενδεχομενικότητας (A,Δ) στην κατάσταση $|\psi\rangle$ θα είναι

(3.10)
$$\begin{aligned}\Pr_{|\psi\rangle}(A,\Delta) &= \sum_n \chi_\Delta(a_n) \Pr_{|\psi\rangle}(A,\{a_n\}) = \sum_n \chi_\Delta(a_n) |\langle a_n|\psi\rangle|^2 = \\ &= \sum_n \chi_\Delta(a_n)\langle\psi|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_{(A,\Delta)}|\psi\rangle\end{aligned}$$
όπου έχουμε θέσει

(3.11)
$$\hat{P}_{(A,\Delta)} = \sum_n \chi_\Delta(a_n)|a_n\rangle\langle a_n| = \sum_n \chi_\Delta(a_n)\hat{P}_{|a_n\rangle} .$$
Με χρήση του «αλγεβρικού ορισμού»,[7] αποδεικνύεται ότι ο $\hat{P}_{(A,\Delta)}$ είναι τελεστής προβολής.

Η αναμενόμενη τιμή του παρατηρήσιμου μεγέθους A στην κατάσταση $|\psi\rangle$ θα είναι

(3.12)
$$\begin{aligned}\langle A\rangle_{|\psi\rangle} &= \sum_n a_n \Pr_{|\psi\rangle}(A,\{a_n\}) = \sum_n a_n |\langle a_n|\psi\rangle|^2 = \\ &= \sum_n a_n \langle\psi|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\end{aligned}$$
αφού ισχύουν οι (3.8) και (3.9).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε κάθε κβαντική κατάσταση η πιθανότητα αληθείας της ενδεχομενικότητας (A,Δ) ισούται με την αναμενόμενη τιμή του προβολικού τελεστή $\hat{P}_{(A,\Delta)}$ που, για αυτό το λόγο, μπορεί να εκληφθεί ως το παρατηρήσιμο μέγεθος που αντιστοιχεί στην ενδεχομενικότητα αυτή. Ασφαλώς, ο $\hat{P}_{(A,\Delta)}$ προβάλλει στον υποχώρο

[7] Ένας φραγμένος (γραμμικός) τελεστής $\hat{P}$ σε ένα χώρο Hilbert είναι προβολικός αν και μόνο αν $\hat{P}^2 = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$.

(3.13)
$$\mathcal{M}_{(A,\Delta)} = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} : \hat{P}_{(A,\Delta)}|\psi\rangle = |\psi\rangle\}$$
του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Έτσι, αν θεωρήσουμε ως *φυσικώς ισοδύναμες* δυο ενδεχομενικότητες που αντιστοιχούν στον ίδιο προβολικό τελεστή, παίρνουμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ προτάσεων που περιγράφουν κλάσεις φυσικής ισοδυναμίας ενδεχομενικοτήτων ενός κβαντικού συστήματος και υποχώρων ενός χώρου Hilbert. Αυτή η 1-1 αντιστοιχία αποδίδει στη λογική της άλγεβρας των κβαντικών προτάσεων δομή *διαφορετική* από εκείνη μιας άλγεβρας Boole.[8]

Κατά την *κβαντική δυναμική*, η χρονική εξέλιξη κάθε φυσικού συστήματος περιγράφεται από μια μονοπαραμετρική ομάδα μοναδιαίων[9] (γραμμικών) τελεστών:
(3.14)
$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$$
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \hat{U}(t), \quad \hat{U}(t_1+t_2) = \hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2)$$
$$\hat{U}(t)\big(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle\big) = c_1\hat{U}(t)|\psi_1\rangle + c_2\hat{U}(t)|\psi_2\rangle, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$
$$\hat{U}(t)^\dagger\hat{U}(t) = \hat{U}(t)\hat{U}(t)^\dagger = \hat{1}.$$
Ειδικότερα, στη μη σχετικιστική κβαντική μηχανική, η καθαρή κατάσταση $|\psi(t)\rangle$ κατά τη χρονική στιγμή t ενός κβαντικού συστήματος εξελίσσεται δυναμικά σύμφωνα με την εξίσωση Schrödinger
(3.15)
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$
όπου $\hat{H}$ η χαμιλτονιανή του συστήματος, οπότε[10] $\hat{U}(t) = \exp(-it\hat{H}/\hbar), t \in \mathbb{R}$.

Αν στο παρατηρήσιμο μέγεθος A αντιστοιχεί ο αυτοσυζυγής τελεστής $\hat{A}$ με φασματική ανάλυση που δίνεται από την (3.8), τότε για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ το παρατηρήσιμο μέγεθος $f(A)$ αναπαριστάνεται από τον τελεστή
(3.16)
$$f(\hat{A}) = \sum_n f(a_n)\hat{P}_{|a_n\rangle} = \sum_n f(a_n)|a_n\rangle\langle a_n|.$$
Από τις (3.11) και (3.16) συνάγεται ότι ο προβολικός τελεστής $\hat{P}_{(A,\Delta)}$ που αντιστοιχεί στην ενδεχομενικότητα (A,Δ) δεν είναι παρά ο $\chi_\Delta(\hat{A})$.

Ας αναζητήσουμε τώρα τη μαθηματική αναπαράσταση σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ μιας *μικτής* κβαντικής κατάστασης ρ της οποίας η στοχαστική συνάρτηση απόκρισης δίνεται τον τύπο
(3.17)
$$\Pr_\rho = w_1\Pr_{|\psi_1\rangle} + \ldots + w_N\Pr_{|\psi_N\rangle} = \sum_{j=1}^N w_j\Pr_{|\psi_j\rangle},$$
όπου $N \geq 1$ φυσικός αριθμός, $w_j \geq 0$ για κάθε $j \in \{1,\ldots,N\}$, $\sum_{j=1}^N w_j = 1$, $|\psi_j\rangle \in \mathcal{H}$ για κάθε $j \in \{1,\ldots,N\}$ και $\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \delta_{jk}$ για κάθε $j,k \in \{1,\ldots,N\}$.

Το *ίχνος* (trace) ενός γραμμικού τελεστή $\hat{W}$ στον $\mathcal{H}$ ορίζεται ως
(3.18)
$$tr\hat{W} = \sum_k \langle e_k|\hat{W}|e_k\rangle,$$
όπου $\{|e_k\rangle\}_{k=1,2,\ldots}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ (και αποδεικνύεται ανεξάρτητο της επιλογής βάσης). Με χρήση της έννοιας του ίχνους μπορούμε να καταλήξουμε σε μια

[8] Συγκεκριμένα, τη δομή ενός orthomodular πλέγματος.
[9] Ο αγγλικός όρος είναι 'unitary' και έχει αποδοθεί στα ελληνικά και ως 'μοναδιακός'.
[10] Υποθέτουμε ότι η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

εναλλακτική μαθηματική διατύπωση του στατιστικού αλγόριθμου Born. Πράγματι, για κάθε καθαρή κατάσταση $|\psi\rangle$ και κάθε ενδεχομενικότητα (A,Δ), έχουμε

(3.19)
$$\begin{aligned}\Pr_{|\psi\rangle}(A,\Delta) &= \langle\psi|\hat{P}_{(A,\Delta)}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_{(A,\Delta)}\hat{1}|\psi\rangle = \\ &= \sum_k \langle\psi|\hat{P}_{(A,\Delta)}|e_k\rangle\langle e_k|\psi\rangle = \sum_k \langle e_k|\psi\rangle\langle\psi|\hat{P}_{(A,\Delta)}|e_k\rangle = \\ &= \sum_k \langle e_k|\hat{P}_{|\psi\rangle}\hat{P}_{(A,\Delta)}|e_k\rangle = tr\left(\hat{P}_{|\psi\rangle}\hat{P}_{(A,\Delta)}\right) = tr\left(\hat{P}_{|\psi\rangle}\chi_\Delta(\hat{A})\right).\end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

(3.20)
$$\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = tr\left(\hat{P}_{|\psi\rangle}\hat{A}\right).$$

Συνοψίζοντας, ο στατιστικός αλγόριθμος Born δίνεται από τους τύπους

(3.21)
$$\Pr_{|\psi\rangle}(A,\Delta) = tr\left(\hat{P}_{|\psi\rangle}\chi_\Delta(\hat{A})\right)$$
$$\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = tr\left(\hat{P}_{|\psi\rangle}\hat{A}\right)$$

για πιθανότητες ενδεχομενικοτήτων και αναμενόμενες τιμές παρατηρήσιμων μεγεθών, αντίστοιχα, σε καθαρές κβαντικές καταστάσεις.

Η γενίκευση της (3.21) οδηγεί στη μαθηματική αναπαράσταση των μικτών κβαντικών καταστάσεων. Από την (3.17) έχουμε, για κάθε ενδεχομενικότητα (A,Δ),

(3.22)
$$\begin{aligned}\Pr_\rho(A,\Delta) &= \sum_{j=1}^{N} w_j \Pr_{|\psi_j\rangle}(A,\Delta) = \sum_{j=1}^{N} w_j\, tr\left(\hat{P}_{|\psi_j\rangle}\hat{P}_{(A,\Delta)}\right) = \\ &= tr\left[\left(\sum_{j=1}^{N} w_j \hat{P}_{|\psi_j\rangle}\right)\hat{P}_{(A,\Delta)}\right].\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, η μικτή κβαντική κατάσταση ρ της οποίας η στοχαστική συνάρτηση απόκρισης δίνεται από την (3.17), θα αναπαριστάνεται από τον τελεστή

(3.23)
$$\hat{\rho} = \sum_{j=1}^{N} w_j \hat{P}_{|\psi_j\rangle} = \sum_{j=1}^{N} w_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|.$$

Από μαθηματική άποψη, ο $\hat{\rho}$ είναι ένας τελεστής πυκνότητας. Γενικά, ένας τελεστής $\hat{W}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ λέγεται *τελεστής πυκνότητας* αν και μόνο αν είναι θετικός ($\langle\psi|\hat{W}|\psi\rangle \geq 0$ για κάθε $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$), αυτοσυζυγής ($\hat{W} = \hat{W}^\dagger$) και έχει ίχνος ίσο με τη μονάδα ($tr\hat{W} = 1$). Ένας τελεστής πυκνότητας $\hat{W}$ δεν είναι προβολικός τελεστής εκτός εάν $\hat{W}^2 = \hat{W}$ (οπότε αντιστοιχεί σε *καθαρή* κατάσταση του κβαντικού συστήματος). Από φυσική άποψη, ο τελεστής πυκνότητας $\hat{\rho}$ της (3.23) εκφράζει μια *μερική* περιγραφή του κβαντικού συστήματος. Σε στατιστική ορολογία, ο $\hat{\rho}$ περιγράφει ένα στατιστικό σύνολο (ensemble) κβαντικών συστημάτων «όμοιας σύστασης», με το w_j να παριστάνει το ποσοστό των συστημάτων που βρίσκονται στην καθαρή κατάσταση $|\psi_j\rangle$. Ακριβέστερα, αν προετοιμάσουμε ένα στατιστικό σύνολο κβαντικών συστημάτων στη μικτή κατάσταση $\hat{\rho}$ που αναλύεται όπως στην (3.23), τότε η εκτίμηση της σχετικής συχνότητας οποιουδήποτε πειραματικού αποτελέσματος για αυτό το στατιστικό σύνολο ισούται ακριβώς με την εκτίμηση που θα λαμβάναμε εάν το στατιστικό σύνολο αποτελούνταν από N υποσύνολα, καθένα στην καθαρή κατάσταση $|\psi_j\rangle$, έτσι ώστε στο ολικό στατιστικό σύνολο κάθε υποσύνολο να αντιπροσωπευόταν με σχετική συχνότητα w_j. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $tr(\hat{\rho}\hat{P}) = \sum_{j=1}^{N} w_j tr(\hat{P}_{|\psi_j\rangle}\hat{P})$, για κάθε προβολικό τελεστή $\hat{P}$.[11]

Με την εισαγωγή των τελεστών πυκνότητας για τη γενική αναπαράσταση των κβαντικών καταστάσεων, ο στατιστικός αλγόριθμος της κβαντικής σημασιολογίας παίρνει πλέον την ακόλουθη γενική μορφή. Αν ένα κβαντικό σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση που αναπαριστάνεται από τον τελεστή πυκνότητας $\hat{\rho}$, η πιθανότητα μια μέτρηση ενός παρατηρήσιμου μεγέθους A να δώσει αποτέλεσμα εντός του υποσυνόλου Δ των πραγματικών αριθμών είναι

(3.24) $$\Pr_{\hat{\rho}}(A,\Delta) = tr\left(\hat{\rho}\chi_{\Delta}(\hat{A})\right),$$

όπου $\hat{A}$ ο αυτοσυζυγής τελεστής που αναπαριστάνει το A και χ_{Δ} η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου Δ. Επιπλέον, η

(3.25) $$\langle A\rangle_{\hat{\rho}} = tr\left(\hat{\rho}\hat{A}\right),$$

δίνει, σε αυτή την περίπτωση, την αναμενόμενη τιμή του μεγέθους A.

Ας σκιαγραφήσουμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο η κβαντική μηχανική πραγματεύεται σύνθετα συστήματα. Ας θεωρήσουμε δυο κβαντικά συστήματα, 1 και 2, των οποίων οι δυνατές φυσικές καταστάσεις αναπαριστάνονται στους χώρους Hilbert $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$ αντίστοιχα. Ως χώρος των φυσικών καταστάσεων του σύνθετου συστήματος $1+2$ ορίζεται το *τανυστικό γινόμενο* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Αναλυτικά,[12] για κάθε $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$ και $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$, ονομάζουμε $\psi_1 \otimes \psi_2$ την συζυγώς διγραμμική μορφή:

(3.26) $$\psi_1 \otimes \psi_2 : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C} : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \left(\psi_1 \otimes \psi_2\right)(\varphi_1, \varphi_2) = \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

(Παρατηρήστε ότι η πράξη $\otimes$ του τανυστικού γινομένου είναι γραμμική σε κάθε όρισμά της.) Έστω $\mathcal{V}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών με μιγαδικούς συντελεστές τέτοιων συζυγώς διγραμμικών μορφών. Εφοδιάζουμε το $\mathcal{V}$ με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ορίζοντας

(3.27) $$\langle \psi_1 \otimes \psi_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \varphi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi_2 | \varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

και επεκτείνοντας με γραμμικό τρόπο σε ολόκληρο το $\mathcal{V}$. Το $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ είναι η πλήρωση (completion) του $\mathcal{V}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle \bullet, \bullet \rangle$.

Αποδεικνύεται ότι αν $\{e_j^{(1)}\}_{j=1,2,...}$ και $\{e_k^{(2)}\}_{k=1,2,...}$ είναι ορθοκανονικές βάσεις για τους $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$ αντίστοιχα, τότε $\{e_j^{(1)} \otimes e_k^{(2)}\}$ είναι ορθοκανονική βάση για τον $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Το γεγονός αυτό επιτρέπει να ορίσουμε ένα γραμμικό τελεστή, $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$,

[11] Κατά μια παραδοσιακή ερμηνεία, που ονομάζεται «ερμηνεία των μιγμάτων με προσφυγή στην άγνοια» ("ignorance interpretation of mixtures"), αν η κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται από τον τελεστή πυκνότητας $\hat{\rho}$ της (3.23), τότε το σύστημα βρίσκεται *όντως* σε κάποια από τις καθαρές καταστάσεις $|\psi_j\rangle$ για $j = 1, 2, ..., N$ αλλά *δεν γνωρίζουμε* σε ποια• και ο συντελεστής w_j εκφράζει απλώς τη *γνωσιολογική* πιθανότητα να βρίσκεται στην $|\psi_j\rangle$. Ωστόσο αυτή η προσέγγιση *δεν* παρέχει μια συνεπή ερμηνεία όλων των μικτών καταστάσεων στην κβαντική μηχανική. Βλ., π.χ., Hughes (1989, σ. 144-145, 150).

[12] Εδώ παρεκκλίνουμε λίγο από τον φορμαλισμό Dirac προκειμένου να διευκολύνουμε την οπτική επόπτευση των μαθηματικών τύπων.

στον $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ για κάθε ζεύγος γραμμικών τελεστών, $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$, στους $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$ αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, θέτουμε

(3.28)
$$\left(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2\right)(e_j^{(1)} \otimes e_k^{(2)}) = \left(\hat{A}_1\, e_j^{(1)}\right) \otimes \left(\hat{A}_2\, e_k^{(2)}\right)$$

για τα στοιχεία μιας βάσης και επεκτείνουμε με γραμμικό τρόπο σε ολόκληρο τον $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Ιδιαίτερα, αν οι $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$ αναπαριστάνουν παρατηρήσιμα μεγέθη A_1 και A_2 για τα κβαντικά συστήματα 1 και 2 αντίστοιχα, τότε ο $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ αναπαριστάνει ένα παρατηρήσιμο μέγεθος για το σύνθετο σύστημα $1+2$. Επιπλέον, ο $\hat{A}_1 \otimes \hat{1}$ αναπαριστάνει το παρατηρήσιμο μέγεθος A_1 για το σύστημα 1 ως παρατηρήσιμο μέγεθος για το σύνθετο σύστημα $1+2$• και, ομοίως, ο $\hat{1} \otimes \hat{A}_2$ αναπαριστάνει το παρατηρήσιμο μέγεθος A_2 για το σύστημα 2 ως παρατηρήσιμο μέγεθος για το σύνθετο σύστημα $1+2$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε διάνυσμα $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ γράφεται στη μορφή[13]

(3.29)
$$|\Psi\rangle = \sum_j \sum_k \psi_{jk}\, e_j^{(1)} \otimes e_k^{(2)} = \sum_j \sum_k \psi_{jk}\, \left|e_j^{(1)}\right\rangle \left|e_k^{(2)}\right\rangle$$

με $\psi_{jk} \in \mathbb{C}$, και ότι

(3.30)
$$\left(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2\right)|\Psi\rangle = \sum_j \sum_k \psi_{jk} \left(\hat{A}_1\, e_j^{(1)}\right) \otimes \left(\hat{A}_2\, e_k^{(2)}\right).$$

Προκύπτει, επίσης, ότι η πιθανότητα μια μέτρηση του A_1 στο 1 και του A_2 στο 2 να δώσει τιμές a_1 και a_2, αντίστοιχα, όταν το σύνθετο σύστημα $1+2$ βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$ είναι

(3.31)
$$\begin{aligned}\Pr_{|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle}(A_1 = a_1, A_2 = a_2) &= \left|\langle a_1|\psi_1\rangle_{\mathcal{H}_1}\right|^2 \left|\langle a_2|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}_2}\right|^2 = \\ &= \Pr_{|\psi_1\rangle}(A_1 = a_1)\Pr_{|\psi_2\rangle}(A_2 = a_2).\end{aligned}$$

Αυτό το αποτέλεσμα συγκροτεί τη «φυσική δικαιολόγηση» για την πραγμάτευση των σύνθετων κβαντικών συστημάτων με τη βοήθεια του τανυστικού γινομένου χώρων Hilbert.

4. Καινοτομίες της κβαντικής μηχανικής

Στην ενότητα αυτή θα συζητήσουμε τέσσερις κύριες θεωρητικές καινοτομίες της κβαντικής μηχανικής: *απροσδιοριστία*, *υπέρθεση*, *ασύμβατα παρατηρήσιμα μεγέθη* και *εμπλοκή*. Είναι σαφές ότι το πώς πρέπει να κατανοηθεί καθεμία από αυτές τις καινοτομίες εξαρτάται από την ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής που αποδέχεται κανείς. Έτσι αυτά που γράφονται παρακάτω δεν πρέπει να εκληφθούν ως «*τελικές* αλήθειες». Πρόκειται, μάλλον, για *αφετηρίες προς* μια ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής – για συνέπειες του κβαντικού φορμαλισμού που *επιζητούν* ερμηνεία επειδή ακριβώς *δεν* μπορούν να κατανοηθούν (εύκολα) σε ένα κλασικό πλαίσιο διαισθήσεων για τη φυσική πραγματικότητα.

---

[13] Σε συμβολισμό Dirac γράφουμε απλώς '$|\psi_1\rangle|\psi_2\rangle$' αντί για '$\psi_1 \otimes \psi_2$'.

4.1. Απροσδιοριστία

Στην κλασική φυσική, ο προσδιορισμός της καθαρής κατάστασης ενός συστήματος καθορίζει την αληθοτιμή κάθε ενδεχομενικότητας (εφόσον αυτή αφορά μόνον το ίδιο το σύστημα και όχι τις σχέσεις του συστήματος με άλλα συστήματα). Αυτό δεν ισχύει στην κβαντική μηχανική όπως συνάγεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1. Για κάθε καθαρή κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος υπάρχουν ενδεχομενικότητες του συστήματος που δεν έχουν καθορισμένη αληθοτιμή στην κατάσταση αυτή.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H}$ ο χώρος Hilbert των φυσικών καταστάσεων ενός κβαντικού συστήματος. Θα δείξουμε ότι για κάθε $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, υπάρχει ενδεχομενικότητα (A, Δ) (όπου A παρατηρήσιμο μέγεθος και $\Delta \subseteq \mathbb{R}$) τέτοια ώστε $0 < \Pr_{|\psi\rangle}(A, \Delta) < 1$. Δεδομένου ότι ο $\mathcal{H}$ είναι τουλάχιστον 2-διάστατος, υπάρχει $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$ και $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$. Ορίζουμε

(4.1)
$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi\rangle$$

Με απλούς υπολογισμούς, προκύπτουν οι

(4.2)
$$\langle\chi|\chi\rangle = 1 \quad \text{και} \quad \langle\chi|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Έστω P το παρατηρήσιμο μέγεθος που αντιστοιχεί στον τελεστή προβολής $\hat{P}_{|\chi\rangle}$ πάνω στον υποχώρο που γεννάται από το $|\chi\rangle$. Έχουμε:

(4.3)
$$\Pr_{|\psi\rangle}(P, \{1\}) = \left|\langle\chi|\psi\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Επομένως $0 < \Pr_{|\psi\rangle}(P, \{1\}) < 1$ και $(P, \{1\})$ είναι η ζητούμενη ενδεχομενικότητα.

Συνεπώς για κάθε καθαρή κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος υπάρχουν ενδεχομενικότητες του συστήματος των οποίων η αληθοτιμή δεν είναι καθορισμένη στην κατάσταση αυτή. Κατά την καθιερωμένη ερμηνεία, το γεγονός αυτό *δεν* πρέπει να κατανοηθεί ως προϊόν δικής μας άγνοιας. Πρόκειται, μάλλον, για ένα είδος *αντικειμενικής απροσδιοριστίας*: η ίδια η θεωρία μας λέει ότι κάθε *μέγιστη εξειδίκευση* της περιγραφής ενός συστήματος παρουσιάζει αυτό το είδος «μη πληρότητας».

Αν, τώρα, μια ενδεχομενικότητα δεν έχει καθορισμένη αληθοτιμή σε μια καθαρή κατάσταση και το σύστημα υποβληθεί σε μια διαδικασία (π.χ., κάποιο πείραμα) που «εκμαιεύει» συγκεκριμένη αληθοτιμή, το αποτέλεσμα της «εκμαίευσης» είναι *αντικειμενικά τυχαίο*. Δεν καθορίζεται από την κατάσταση του συστήματος, ούτε από την κατάσταση του συστήματος σε σύζευξη με τις καταστάσεις των υπολοίπων συστημάτων που συμμετέχουν στη διαδικασία και την αλληλεπίδραση μεταξύ τους· και αυτή η τυχαιότητα δεν οφείλεται σε άγνοια των παρατηρητών (αν υπάρχουν), αλλά αποτελεί στοιχείο της ίδιας της φυσικής κατάστασης. Αυτό το είδος της *αντικειμενικής τυχαιότητας* προϋποθέτει το παραπάνω είδος αντικειμενικής απροσδιοριστίας και, κατά συνέπεια, δεν απαντά στην κλασική φυσική. Ασφαλώς, υπάρχει μια έννοια τυχαίου στην κλασική στατιστική μηχανική αλλά απορρέει από ελλιπή εξειδίκευση της περιγραφής του συστήματος, από μερική άγνοια των μικροσκοπικών ιδιοτήτων του συστήματος.

Ας υποθέσουμε, πάλι, ότι η αληθοτιμή μιας ενδεχομενικότητας δεν είναι καθορισμένη σε μια *καθαρή* κατάσταση, ας πούμε $|\psi\rangle$, ενός κβαντικού συστήματος. Σύμφωνα με την κβαντική μηχανική, υπάρχει μια καθορισμένη πιθανότητα να διαπιστωθεί ότι η ενδεχομενικότητα αυτή είναι αληθής και μια καθορισμένη πιθανότητα να διαπιστωθεί ότι είναι ψευδής. Οι πιθανότητες αυτές είναι *αντικειμενικές* με την έννοια ότι εξαρτώνται μόνον από την ενδεχομενικότητα και την καθαρή κατάσταση του συστήματος και όχι από τις πεποιθήσεις κάποιου παρατηρητή. Αν όλα τα μέλη μιας συλλογής όμοιων συστημάτων έχουν προετοιμαστεί στην κατάσταση $|\psi\rangle$ και για κάθε μέλος «εκμαιεύεται» η αληθοτιμή της ενδεχομενικότητας με την ίδια διαδικασία, τότε μπορούμε να αναμένουμε ότι οι σχετικές συχνότητες των αποτελεσμάτων θα συγκλίνουν στις αντικειμενικές πιθανότητες. Αλλά θα ήταν λάθος να πούμε ότι *αρχικά* είχαμε ένα ανομοιογενές στατιστικό σύνολο συστημάτων του ιδίου είδους στο οποίο υπήρχαν καθορισμένες συχνότητες αλήθειας και ψεύδους της ενδεχομενικότητας *πριν* από τη φυσική διαδικασία «εκμαίευσης» αληθοτιμής. Αν συνέβαινε αυτό τότε η $|\psi\rangle$ δεν θα αποτελούσε μέγιστη εξειδίκευση της περιγραφής του συστήματος, γιατί για κάθε μέλος του στατιστικού συνόλου συστημάτων θα υπήρχε μια αντικειμενική ιδιότητα που δεν θα συμπεριλαμβανόταν στην περιγραφή που παρέχει η $|\psi\rangle$.

4.2. Υπέρθεση

Αν τα κανονικοποιημένα διανύσματα $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$ σε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ αναπαριστάνουν δυνατές καθαρές καταστάσεις ενός κβαντικού συστήματος Σ, τότε κάθε διάνυσμα της μορφής

(4.4) $$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1,$$

αναπαριστάνει μια δυνατή καθαρή κατάσταση του Σ. Αυτή είναι η *αρχή της υπέρθεσης* (principle of superposition) για κβαντικά συστήματα. Είναι κοινή πεποίθηση ότι η αρχή της υπέρθεσης αποτελεί μια από τις πλέον ριζικές εννοιολογικές καινοτομίες που διαφοροποιεί την κβαντική από την κλασική φυσική.[14]

Γιατί, όμως, η κβαντική αρχή της υπέρθεσης φαντάζει τόσο «μυστηριώδης»; Μια ανάλογη αρχή διέπει όλα τα φυσικά φαινόμενα που υπακούουν σε γραμμικές ομογενείς μερικές διαφορικές εξισώσεις, όπως η εξίσωση κύματος

(4.5) $$\frac{\partial^2 u(\vec{x},t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u(\vec{x},t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Αν u_1 και u_2 είναι λύσεις της (4.5), τότε κάθε $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύση της (4.5).

Η διαφορά φαίνεται να είναι η εξής. Στην κλασική φυσική, η υπέρθεση δυο κυμάτων ταιριάζει σε μια διαισθητικά εύλογη «εικόνα». Η κυματική συνάρτηση $u(\vec{x},t)$ είναι πεδίο στον χωροχρόνο (π.χ., το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο) και, κατ' αρχήν, παρατηρήσιμο μέγεθος. Επιπλέον, η κατάσταση του συστήματος ορίζεται πλήρως από τις τιμές που λαμβάνουν τέτοια παρατηρήσιμα μεγέθη στα σημεία του χωροχρόνου. Έτσι η υπέρθεση μπορεί να χαρακτηριστεί ως κατάσταση στην οποία οι

[14] Αυτή τη θέση υποστηρίζει, μεταξύ άλλων, ο Dirac ([1930] 1993, σ. 10-18).

τιμές των παρατηρήσιμων μεγεθών σε κάθε χρονικό σημείο είναι «συνδυασμοί» των τιμών που θα είχαν τα ίδια μεγέθη σε καθεμία από τις υπερτιθέμενες καταστάσεις.

Στην κβαντική μηχανική, όμως, το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι ούτε πεδίο στον χωροχρόνο ούτε παρατηρήσιμο μέγεθος. Και, σημαντικότερο, ο σύνδεσμος ιδιοκατάστασης-ιδιοτιμής ορίζει ότι ένα κβαντικό σύστημα έχει μια καθορισμένη ιδιότητα που εκφράζεται ως καθορισμένη τιμή ενός παρατηρήσιμου μεγέθους *μόνο αν* το σύστημα βρίσκεται σε ιδιοκατάσταση του αυτοσυζυγούς τελεστή που αναπαριστάνει το εν λόγω παρατηρήσιμο μέγεθος. Έτσι μερικές ιδιότητες ενός κβαντικού συστήματος όταν αυτό βρίσκεται σε *υπέρθεση* ιδιοκαταστάσεων ενός παρατηρήσιμου μεγέθους δεν μπορούν να νοηθούν ως «συνδυασμοί» των ιδιοτήτων που θα είχε το σύστημα σε καθεμία από τις υπερτιθέμενες καταστάσεις. Για παράδειγμα, θεωρήστε ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται στην ακόλουθη κατάσταση spin

(4.6)
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\vec{n},+\rangle + |\vec{n},-\rangle\right),$$

όπου $\vec{n}$ μοναδιαίο διάνυσμα για τυχαία κατεύθυνση στον χώρο και $|\vec{n},\pm\rangle$ τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή που αναπαριστάνει τη συνιστώσα του spin κατά τη διεύθυνση του $\vec{n}$ για τις ιδιοτιμές ± 1 αντίστοιχα (σε μονάδες $\hbar/2$).[15] Κατά την καθιερωμένη ερμηνεία, η τιμή του spin του ηλεκτρονίου κατά τη διεύθυνση του $\vec{n}$ δεν είναι $+1$ *και* δεν είναι -1 *και* δεν είναι και $+1$ και -1 *και* δεν είναι ούτε $+1$ ούτε -1. Και το *ποια* ή *τι* ακριβώς είναι δεν το γνωρίζουμε (τουλάχιστον, ανεξάρτητα από μια «βαθύτερη» ερμηνεία της θεωρίας).

4.3. Ασύμβατα παρατηρήσιμα μεγέθη

Σε συζητήσεις που αφορούν τα θεμέλια της κβαντικής μηχανικής συναντά κανείς συχνά το ερώτημα αν δυο παρατηρήσιμα μεγέθη είναι *συμβατά* – ερώτημα που θεωρείται συνώνυμο με το αν είναι δυνατή η *ταυτόχρονη* μέτρηση των δυο μεγεθών ή, σε μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση, με το αν είναι δυνατόν τα δυο μεγέθη να έχουν *ταυτόχρονα* καθορισμένες τιμές.

Η συνθήκη συμβατότητας μεταξύ δυο οποιωνδήποτε παρατηρήσιμων μεγεθών, A και B, ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο στην κλασική μηχανική. Τα δυο μεγέθη αναπαριστάνονται από δυο συναρτήσεις, f_A και f_B, πάνω στον φασικό χώρο S έτσι ώστε σε κάθε κατάσταση $s \in S$ να έχουν τις ταυτόχρονα ορισμένες τιμές $f_A(s)$ και $f_B(s)$ αντίστοιχα.

Η «κατάσταση» στην κβαντική μηχανική φαίνεται να είναι διαφορετική αφού η ασυμβατότητα πολλών ζευγών παρατηρήσιμων μεγεθών φαίνεται να απορρέει από τον ίδιο τον φορμαλισμό της θεωρίας. Ωστόσο, η σχετική συζήτηση πάσχει από την αοριστία της έκφρασης «ταυτόχρονη μέτρηση». Κάθε μέτρηση ολοκληρώνεται σε πεπερασμένο, έστω «μικρό», χρονικό διάστημα. Θα θεωρούμε «ταυτόχρονες» δυο μετρήσεις αν τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα συμπίπτουν εν μέρει ή μόνον αν συμπίπτουν εξ ολοκλήρου; Ή θα λέμε ότι δυο παρατηρήσιμα μεγέθη είναι «ταυτόχρονα μετρήσιμα» αν μια μέτρηση του ενός ακολουθούμενη αμέσως από μια μέτρηση του άλλου δίνει τα ίδια αποτελέσματα ανεξάρτητα από το ποιο μέγεθος επιλέξουμε να μετρήσουμε πρώτο και ποιο δεύτερο; Πρόσθετες ανησυχίες προκαλεί

[15] Βλ. και Παράρτημα 2.

και η παρατήρηση ότι στη σχετικότητα η σχέση της ταυτοχρονίας εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.

Για να αποφύγουμε τέτοιους σκοπέλους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο παρατηρήσιμα μεγέθη, A και B, είναι συμβατά αν υπάρχει παρατηρήσιμο μέγεθος C και συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $A = f(C)$ και $B = g(C)$. Η διαίσθηση είναι ότι, σε αυτή την περίπτωση, *μια* μόνο μέτρηση του C αποδίδει «ταυτόχρονα» τιμές στα A και B. Το παρακάτω θεώρημα[16] δείχνει ότι αυτή η συνθήκη συμβατότητας ικανοποιείται ακριβώς στην περίπτωση που οι αντίστοιχοι αυτοσυζυγείς τελεστές, $\hat{A}$ και $\hat{B}$, μετατίθενται – δηλαδή, ακριβώς στην περίπτωση που ο μεταθέτης τους,

(4.7)
$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A},$$

μηδενίζεται.

<u>Θεώρημα 2</u>. Αν $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ είναι αυτοσυζυγείς τελεστές σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\hat{A} = f(\hat{C})$ και $\hat{B} = g(\hat{C})$, τότε $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$. Αντίστροφα, αν $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι αυτοσυζυγείς τελεστές σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$, τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $\hat{C}$ στον $\mathcal{H}$ και συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\hat{A} = f(\hat{C})$ και $\hat{B} = g(\hat{C})$.

Και η ύπαρξη ασύμβατων, με την παραπάνω έννοια, παρατηρήσιμων μεγεθών σχετίζεται με τις *σχέσεις απροσδιοριστίας* ή *αβεβαιότητας* του Heisenberg – η κατανόηση των οποίων αποτέλεσε την ιστορικά πρώτη μείζονα θεματική στη φιλοσοφία της κβαντικής μηχανικής.

Ορίζουμε την *αβεβαιότητα* ή *διασπορά* των αποτελεσμάτων μέτρησης ενός παρατηρήσιμου μεγέθους A στην κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle$ με τον τύπο:

(4.8)
$$\left(\Delta_{|\psi\rangle} A\right) = \left\langle \left(A - \langle A \rangle_{|\psi\rangle}\right)^2 \right\rangle_{|\psi\rangle}^{1/2} = \left[\left\langle A^2 \right\rangle_{|\psi\rangle} - \langle A \rangle_{|\psi\rangle}^2\right]^{1/2}.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $\left(\Delta_{|\psi\rangle} A\right) = 0$ αν και μόνο αν το $|\psi\rangle$ είναι ιδιοδιάνυσμα του αυτοσυζυγούς τελεστή $\hat{A}$ που αναπαριστάνει το παρατηρήσιμο μέγεθος A. Εφόσον δεχόμαστε ότι το A *έχει* καθορισμένη τιμή σε μια κατάσταση ακριβώς στην περίπτωση που η κατάσταση αυτή αναπαριστάνεται από ιδιοδιάνυσμα του $\hat{A}$, μπορούμε να κατανοήσουμε την αβεβαιότητα ή διασπορά $\left(\Delta_{|\psi\rangle} A\right)$ ως «μέτρο του βαθμού στον οποίο το κβαντικό σύστημα στην κατάσταση $|\psi\rangle$ *δεν έχει* καθορισμένη τιμή για το παρατηρήσιμο μέγεθος A».

Χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι για οποιαδήποτε παρατηρήσιμα μεγέθη A και B και οποιαδήποτε κβαντική κατάσταση $|\psi\rangle$ ισχύει η *γενικευμένη σχέση απροσδιοριστίας* ή *αβεβαιότητας* του Heisenberg:

(4.9)
$$\left(\Delta_{|\psi\rangle} A\right)\left(\Delta_{|\psi\rangle} B\right) \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\left[\hat{A}, \hat{B}\right]|\psi\rangle\right|.$$

---

[16] Στην διατύπωση που παρουσιάζεται το θεώρημα ισχύει για χώρους Hilbert πεπερασμένης διάστασης. Για περισσότερες λεπτομέρειες, συμπεριλαμβανομένων αποδείξεων, βλ., π.χ., Isham (1995, σ. 97-101).

Συνήθως γράφουμε (με κάποια δόση μαθηματικής αφέλειας) $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$, οπότε η (4.9) οδηγεί στη *διάσημη σχέση αβεβαιότητας θέσης-ορμής*:

(4.10)
$$\left(\Delta_{|\psi\rangle}x\right)\left(\Delta_{|\psi\rangle}p\right)\geq\frac{\hbar}{2}.$$

Προκειμένου να αποφύγουμε το συνηθισμένο folklore για τις σχέσεις απροσδιοριστίας, πρέπει να τονίσουμε δυο σημεία. Πρώτο, η (4.9) είναι αυστηρή μαθηματική συνέπεια και όχι συμπέρασμα από νοητικά πειράματα με «μικροσκόπια ακτινών γ», κ.λπ. Και δεύτερο, αντίθετα με ένα «λαϊκό μύθο», η αρχή της απροσδιοριστίας δεν «λέει» ότι το γινόμενο των διασπορών δυο «μεγεθών που δεν μετατίθενται» είναι μεγαλύτερο του μηδενός για *κάθε* κβαντική κατάσταση. Λόγου χάριν, οι συνιστώσες του spin ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων ικανοποιούν τις σχέσεις

(4.11)
$$\left[\hat{S}_x,\hat{S}_y\right]=i\hbar\hat{S}_z.$$

Επομένως με χρήση της (4.9) συνάγεται ότι για κάθε κατάσταση $|\psi\rangle$,

(4.12)
$$\left(\Delta_{|\psi\rangle}S_x\right)\left(\Delta_{|\psi\rangle}S_y\right)\geq\frac{\hbar}{2}\left|\langle\psi\,|\,\hat{S}_z\,|\psi\rangle\right|.$$

Αλλά για $|\psi\rangle=|x,+\rangle$ (ιδιοδιάνυσμα του $\hat{S}_x$ με ιδιοτιμή +1 σε μονάδες $\hbar/2$) έχουμε $\left(\Delta_{|\psi\rangle}S_x\right)=0$, $\left(\Delta_{|\psi\rangle}S_y\right)=\frac{1}{2}$ και $\langle\psi\,|\,\hat{S}_z\,|\psi\rangle=0$· οπότε $\left(\Delta_{|\psi\rangle}S_x\right)\left(\Delta_{|\psi\rangle}S_y\right)=0$ χωρίς «αντίφαση» με την αρχή της απροσδιοριστίας.

4.4. Εμπλοκή

Ας θεωρήσουμε το σύνθετο σύστημα $1+2$ που απαρτίζεται από δυο κβαντικά συστήματα 1 και 2 με χώρους Hilbert $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$. Η γενική μαθηματική αναπαράσταση των φυσικών καταστάσεων του σύνθετου συστήματος $1+2$ παρέχεται από τελεστές πυκνότητας στον χώρο τανυστικού γινομένου $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$. Ποιοι τελεστές πυκνότητας, $\hat{W}^{(1)}$ στον $\mathcal{H}_1$ και $\hat{W}^{(2)}$ στον $\mathcal{H}_2$, περιγράφουν τις καταστάσεις των υποσυστημάτων 1 και 2, αντίστοιχα, όταν η κατάσταση του σύνθετου συστήματος $1+2$ περιγράφεται από τον τελεστή πυκνότητας $\hat{W}$ στον $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$;

Με στόχο την αποσαφήνιση της ερώτησης εισάγουμε ένα *αίτημα συνέπειας*: οι πιθανότητες των δυνατών αποτελεσμάτων μέτρησης σε καθένα από τα δυο υποσυστήματα πρέπει να είναι ίδιες ανεξάρτητα από το αν θεωρούμε το εν λόγω υποσύστημα «μεμονωμένο» ή σαν «μέρος» του σύνθετου συστήματος. Συγκεκριμένα, απαιτούμε για κάθε ζεύγος παρατηρήσιμων μεγεθών A_1 και A_2 για τα υποσυστήματα 1 και 2 και για κάθε ζεύγος υποσυνόλων Δ_1 και Δ_2 του συνόλου των πραγματικών αριθμών να ισχύουν οι ταυτότητες

(4.13)
$$tr\left(\hat{W}(\hat{P}_{(A_1,\Delta_1)}\otimes\hat{1})\right)=tr_1\left(\hat{W}^{(1)}\hat{P}_{(A_1,\Delta_1)}\right)$$
$$tr\left(\hat{W}(\hat{1}\otimes\hat{P}_{(A_2,\Delta_2)})\right)=tr_2\left(\hat{W}^{(2)}\hat{P}_{(A_2,\Delta_2)}\right),$$

όπου το σύμβολο $tr_j\,(j=1,2)$ υποδηλώνει την πράξη του μερικού ίχνους ως προς τον $\mathcal{H}_j$. Αποδεικνύεται ότι η συνθήκη (4.13) ορίζει μονοσήμαντα τους τελεστές πυκνότητας $\hat{W}^{(1)}$ και $\hat{W}^{(2)}$ και, μάλιστα, ότι τα στοιχεία πίνακα του καθενός στις ορθοκανονικές βάσεις $\{|e_j^{(1)}\rangle\}_{j=1,2,\ldots}$ και $\{|e_j^{(2)}\rangle\}_{j=1,2,\ldots}$ δίνονται, αντίστοιχα, από τις ισότητες:

(4.14)
$$W_{jk}^{(1)} = \langle e_j^{(1)} | \hat{W}^{(1)} | e_k^{(1)} \rangle = \sum_m \langle e_j^{(1)} \otimes e_m^{(2)}, \hat{W}(e_k^{(1)} \otimes e_m^{(2)}) \rangle$$
$$W_{jk}^{(2)} = \langle e_j^{(2)} | \hat{W}^{(2)} | e_k^{(2)} \rangle = \sum_m \langle e_m^{(1)} \otimes e_j^{(2)}, \hat{W}(e_m^{(1)} \otimes e_k^{(2)}) \rangle.$$

Γράφουμε απλώς $\hat{W}^{(1)} = tr_2 \hat{W}$ και $\hat{W}^{(2)} = tr_1 \hat{W}$.

Για τη φιλοσοφία της κβαντικής μηχανικής, το πιο ενδιαφέρον συμπέρασμα που μπορεί να προκύψει με εφαρμογή αυτής της διαδικασίας *αναγωγής του πίνακα πυκνότητας* είναι το εξής: υπάρχουν *καθαρές* καταστάσεις του σύνθετου συστήματος των οποίων η αναγωγή σε καθένα από τα υποσυστήματα δίνει μια *μικτή* κατάσταση. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα ζεύγος σωματιδίων spin ½ στην *κατάσταση singlet* του ολικού spin:

(4.15)
$$\left|\Psi_{\text{singlet}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z,+\right\rangle^{(1)}\left|z,-\right\rangle^{(2)} - \left|z,-\right\rangle^{(1)}\left|z,+\right\rangle^{(2)}\right),$$

με τον συνήθη συμβολισμό (βλ. και Παράρτημα 2). Η $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ είναι καθαρή κατάσταση και, μάλιστα, ιδιοκατάσταση του ολικού spin[17] με ιδιοτιμή 0. Ωστόσο, η αναγωγή του πίνακα πυκνότητας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο τελεστής πυκνότητας για το υποσύστημα (σωματίδιο) j είναι, για κάθε $j \in \{1,2\}$,

(4.16)
$$\hat{W}^{(j)} = \frac{1}{2}\left(\hat{P}_{|z,+\rangle^{(j)}} + \hat{P}_{|z,-\rangle^{(j)}}\right), \quad \text{όπου} \quad \hat{P}_{|z,\pm\rangle^{(j)}} = \left|z,\pm\right\rangle^{(j)}\,{}^{(j)}\!\left\langle z,\pm\right|.$$

Παρατηρήστε ότι ο πίνακας πυκνότητας $\hat{W}^{(j)}$ περιγράφει μια *μικτή* κατάσταση – την κατάσταση ενός «εντελώς μη πολωμένου» spin.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι στην κβαντική μηχανική είναι δυνατόν ένα σύνθετο σύστημα να βρίσκεται σε ορισμένη καθαρή κατάσταση ενώ κανένα από τα υποσυστήματα να μην βρίσκεται σε ορισμένη καθαρή κατάσταση από μόνο του. Αυτό το «φαινόμενο» δεν έχει κλασικό ανάλογο και φαίνεται ιδιαίτερα «παράδοξο» αν ληφθεί υπόψη ότι μια καθαρή κατάσταση αντιστοιχεί σε *μέγιστη εξειδίκευση της περιγραφής ενός συστήματος*. Η αύρα της παραδοξότητας ενισχύεται από το γεγονός ότι οι καταστάσεις των υποσυστημάτων δεν καθορίζουν μονοσήμαντα ούτε την κατάσταση ούτε τις συναφείς ιδιότητες του σύνθετου συστήματος. Πράγματι, δεδομένου ότι καθένα από τα δυο spin ½ σωματίδια βρίσκεται στη μικτή κατάσταση που περιγράφεται από την (4.16), δεν είναι απαραίτητο το σύνθετο σύστημα του ζεύγους των σωματιδίων να βρίσκεται στην καθαρή κατάσταση $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$· μπορεί να βρίσκεται στην καθαρή κατάσταση $|\Psi_{\text{triplet}}\rangle$, όπου

(4.17)
$$\left|\Psi_{\text{triplet}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z,+\right\rangle^{(1)}\left|z,+\right\rangle^{(2)} - \left|z,-\right\rangle^{(1)}\left|z,-\right\rangle^{(2)}\right).$$

Και το πρόβλημα δεν αφορά μόνον τον «πλατωνικό κόσμο» των μιγαδικών χώρων Hilbert. Κατά την κβαντική σημασιολογία, οι καταστάσεις $|\Psi_{\text{singlet}}\rangle$ και $|\Psi_{\text{triplet}}\rangle$ διαφέρουν ως προς *εμπειρικές ιδιότητες*: στην πρώτη το ολικό spin έχει καθορισμένη

[17] Ως ολικό spin εννοούμε το παρατηρήσιμο μέγεθος για το σύνθετο σύστημα αναπαριστάνεται από τον τελεστή $\hat{S}^2 = (\hat{S}_1 \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{S}_2)^2$.

τιμή 0 ενώ στη δεύτερη έχει καθορισμένη τιμή $2\hbar^2$. Και αυτό υπαινίσσεται ότι ο κβαντικός κόσμος χαρακτηρίζεται από ένα είδος *ολισμού φυσικών ιδιοτήτων*: το ολικό spin του σύνθετου συστήματος δεν καθορίζεται μονοσήμαντα από τα spin των υποσυστημάτων – στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα υποσυστήματα δεν έχουν καν καθορισμένες τιμές spin! – αλλά ούτε και από τις καταστάσεις των υποσυστημάτων.

Αυτή η μυστηριώδης πτυχή των σύνθετων κβαντικών συστημάτων έχει ονομαστεί *κβαντική εμπλοκή* (quantum entanglement) και βρίσκεται στον πυρήνα πολλών μεταφυσικών καινοτομιών της κβαντικής μηχανικής όπως η μη τοπικότητα, η μη διαχωρισιμότητα και ο ολισμός. Όπως δήλωσε πρόσφατα ένας σύγχρονος φιλόσοφος της φυσικής,

> Ο κόσμος δεν είναι απλώς ένα σύνολο εντοπισμένων αντικειμένων που υπάρχουν ξεχωριστά και που σχετίζονται εξωτερικά μόνο διαμέσου του χώρου και του χρόνου. Κάτι βαθύτερο, και πιο μυστηριώδες, υφαίνει τον ιστό του κόσμου. Έχουμε μόλις φθάσει σε εκείνο το στάδιο της ανάπτυξης της φυσικής στο οποίο μπορούμε να αρχίσουμε να συλλογιζόμαστε τι θα μπορούσε να είναι αυτό.
>
> Tim Maudlin (1998, σ. 60)

Παράρτημα 1

Καταστάσεις και παρατηρήσιμα μεγέθη στην κλασική και την κβαντική μηχανική[18]

	Κλασική μηχανική	**Κβαντική μηχανική**
Χώρος των φυσικών καταστάσεων	Φασικός χώρος S: για N σωματίδια, το $\mathbb{R}^{6N}$	Μιγαδικός χώρος Hilbert $\mathcal{H}$
Καθαρή κατάσταση	Σημείο του φασικού χώρου, $s \in S$	Κανονικοποιημένο διάνυσμα στον χώρο Hilbert, $\lvert\psi\rangle \in \mathcal{H}$ με $\lVert\psi\rVert = \langle\psi\vert\psi\rangle^{1/2} = 1$
Μικτή κατάσταση	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στον φασικό χώρο	Τελεστής πυκνότητας στον χώρο Hilbert
Παρατηρήσιμο μέγεθος A	Πραγματική συνάρτηση πάνω στον φασικό χώρο, $f_A : S \to \mathbb{R}$	Αυτοσυζυγής τελεστής στον χώρο Hilbert, $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
Δυνατές τιμές παρατηρήσιμου μεγέθους A	Το πεδίο τιμών της f_A, συνήθως συνεχές	Οι ιδιοτιμές του $\hat{A}$ αν ο $\hat{A}$ έχει διακριτό φάσμα. Γενικότερα, τα στοιχεία του φάσματος του $\hat{A}$.
Ενδεχομενικότητα	Υποσύνολο του φασικού	Υποχώρος του χώρου Hilbert, $\mathcal{M}_{(A,\Delta)}$

[18] Βλ. και Hughes (1989, σ. 69).

(A,Δ): «Η τιμή του A βρίσκεται στο υποσύνολο Δ του $\mathbb{R}$»	χώρου, $S_{(A,\Delta)} = f_A^{-1}[\Delta] \subseteq S$	
Είναι η (A,Δ) αληθής στην καθαρή κατάσταση … του συστήματος;	Απάντηση με «ναι» ή «όχι»: «ναι» αν και μόνο αν $f_A(s) \in \Delta$, όπου s η καθαρή κατάσταση του συστήματος	Πιθανοκρατική απάντηση: $\Pr_{\lvert\psi\rangle}(A,\Delta) = \langle\psi \vert \hat{P}_{(A,\Delta)} \vert \psi\rangle$, όπου $\lvert\psi\rangle$ η καθαρή κατάσταση του συστήματος
Χώρος των φυσικών καταστάσεων σύνθετου συστήματος	Καρτεσιανό γινόμενο φασικών χώρων, $S_1 \times S_2$	Τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Παράρτημα 2

Spin[19]

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x\hat{S}_x + \hat{S}_y\hat{S}_y + \hat{S}_z\hat{S}_z$$

$$\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right] = i\hbar\hat{S}_z, \quad \left[\hat{S}_y, \hat{S}_z\right] = i\hbar\hat{S}_x, \quad \left[\hat{S}_z, \hat{S}_x\right] = i\hbar\hat{S}_y$$

Αποδεικνύεται ότι $\left[\hat{S}^2, \hat{S}_j\right] = 0$ για κάθε $j = x, y, z$. Ο $\hat{S}^2$ έχει ιδιοτιμές $s(s+1)\hbar^2$, όπου $s = \frac{n}{2}$ $(n = 0,1,\ldots)$. Κάθε ιδιοτιμή του $\hat{S}^2$ παρουσιάζει πολλαπλότητα εκφυλισμού $(2s+1)$ που μπορεί να αρθεί με προσδιορισμό της ιδιοτιμής μιας από τις συνιστώσες του spin, π.χ. του $\hat{S}_z$. Οι ιδιοτιμές του $\hat{S}_z$ είναι της μορφής $m\hbar$ με $m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$ για κάθε s.

Τα συστήματα spin ½ έχουν $s = \frac{1}{2}$ και $m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Επιδέχονται μαθηματική αναπαράσταση σε 2-διάστατο μιγαδικό χώρο Hilbert με ορθοκανονική βάση τα ιδιοδιανύσματα του $\hat{S}_z$, $|z,+\rangle$ $(m = 1/2)$ και $|z,-\rangle$ $(m = -1/2)$. Τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα των $\hat{S}_x$ και $\hat{S}_y$ γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί

$$|x,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z,+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|z,-\rangle$$

$$|y,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z,+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|z,-\rangle$$

και οι τελεστές $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ αποκτούν τις αναπαραστάσεις

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|z,+\rangle\langle z,-| + |z,-\rangle\langle z,+|\right)$$

$$\hat{S}_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-|z,+\rangle\langle z,-| + |z,-\rangle\langle z,+|\right)$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\left(|z,+\rangle\langle z,+| - |z,-\rangle\langle z,-|\right).$$

$$\boxed{\text{Αναπαράσταση συστήματος spin ½ στο } \mathbb{C}^2}$$

$$|\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle z,+|\psi\rangle \\ \langle z,-|\psi\rangle \end{pmatrix} \qquad \langle\psi| \doteq \left(\langle\psi|z,+\rangle, \langle\psi|z,-\rangle\right)$$

$$|x,+\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |y,+\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |z,+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|x,-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |y,-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad |z,-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_j \doteq \frac{\hbar}{2}\sigma_j \text{ όπου } \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

[19] Βλ., π.χ., κεφάλαιο 3 στο Sakurai (1985).

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Dirac, P. A. M. ([1930] 1993): *The Principles of Quantum Mechanics*. 4η έκδοση. Oxford: Clarendon Press.

Hughes, R. I. G. (1989): *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Isham, C. J. (1995): *Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations*. London: Imperial College Press.

Maudlin, T. (1998): "Part and Whole in Quantum Mechanics" στο E. Castellani (επιμ.), *Interpreting Bodies: Classical and Modern Objects in Quantum Physics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, σ. 46-60.

Penrose, R. (1986): "Gravity and State Vector Reduction" στο R. Penrose και C. J. Isham (επιμ.), *Quantum Concepts in Space and Time*. Oxford: Clarendon Press, σ. 129-146.

Sakurai, J. J. (1985) : *Modern Quantum Mechanics*. Επιμέλεια San Fu Tuan. New York, NY: Addison-Wesley.