ΣΤΑΤΙΚΗ (ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι)

Τυπολόγιο & Μεθοδολογία

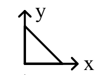
ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΟΥΣ

Οι συντεταγμένες του Κ.Β. μιας επίπεδης επιφάνειας F ως προς σύστημα x,y είναι :

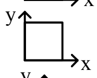
$$x_c = \frac{1}{F}\int x dF \qquad y_c = \frac{1}{F}\int y dF$$

Κέντρα βάρους απλών επιφανειών

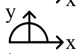
$$x_c = \frac{\alpha}{3} \quad y_c = \frac{b}{3}$$



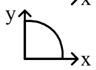
$$x_c = \frac{\alpha}{2} \quad y_c = \frac{b}{2}$$



$$x_c = 0 \quad y_c = \frac{4R}{3\pi}$$



$$x_c = \frac{4R}{3\pi} \quad y_c = \frac{4R}{3\pi}$$

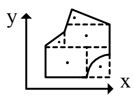


Κέντρο βάρους σύνθετων επιφανειών

Χωρίζεται η σύνθετη επιφάνεια σε απλές από 1…..n

$$x_c = \frac{x_1F_1 + x_2F_2 + ... + x_\eta F_\eta}{F_1 + F_2 + ... + F_n}$$

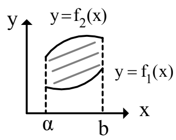
$$y_c = \frac{y_1F_1 + y_2F_2 + ... + y_\eta F_\eta}{F_1 + F_2 + ... + F_n}$$



Αν μια επιφάνεια αφαιρείται (τρύπα) τότε $F < 0$

Κέντρο βάρους επιφανειών ανάμεσα σε καμπύλες

Σε περίπτωση που η επιφάνεια περιορίζεται από τις καμπύλες $y=f_2(x)$ και $y=f_1(x)$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=b$ οι συντεταγμένες του Κ.Β. είναι :



$$x_c = \frac{1}{F}\int_\alpha^\beta x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

$$y_c = \frac{1}{F}\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left(f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x)\right)dx$$

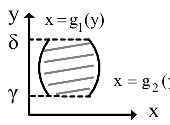
$$F = \int_\alpha^\beta \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

Ανάλογα όταν η επιφάνεια περιορίζεται από τις καμπύλες $x=g_1(y)$ και $x=g_2(y)$ και τις ευθείες $y=\delta$ και $y=\gamma$.

$$x_c = \frac{1}{F}\int_\gamma^\delta \frac{1}{2}\left(g_2^2(y) - g_1^2(y)\right)dy$$

$$y_c = \frac{1}{F}\int_\gamma^\delta y\left(g_2(y) - g_1(y)\right)dy$$

$$F = \int_\gamma^\delta \left(g_2(y) - g_1(y)\right)dy$$



ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Ροπές αδράνειας β' βαθμού (ορισμοί)

Η ροπή αδράνειας υπολογίζεται πάντα ως προς κάποιον άξονα

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA \qquad I_{yy} = \int_A x^2 dA$$

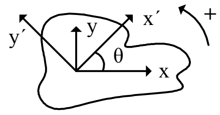
$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_A xydA$$

$$I_p = \int\left(x^2 + y^2\right)dA = I_{xx} + I_{yy}$$

Αν ο x ή ο y είναι άξονας συμμετρίας τότε $I_{xy} = 0$

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Σχέσεις που συνδέουν ροπές αδράνειας δυο συστημάτων με το ίδιο κέντρο όπου το x΄y΄ είναι στραμμένο κατά γωνία θ ως προς το xy :



$$I_{x'x'} = \tfrac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) +$$
$$+\tfrac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy})\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'y'} = \tfrac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) -$$
$$-\tfrac{1}{2}(I_{xx} - I_{yy})\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = -\tfrac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy})\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

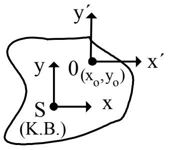
Παράλληλη μετατόπιση αξόνων (θ. Steiner)

Σχέσεις που συνδέουν τις ροπές αδράνειας όταν το σύστημα x΄y΄ είναι μετατοπισμένο παράλληλα ως προς το xy.

$$I_{x'x'} = I_{xx} + y_o{}^2 A$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} + x_o{}^2 A$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} - x_o y_o A$$



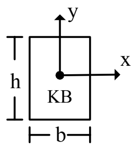
Ροπές αδράνειας απλών διατομών

Ορθογώνιο Παρ/μο

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

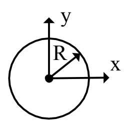


Κύκλος

$$I_{xx} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{yy} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = 0^4$$

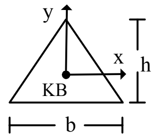


Ισοσκελές τρίγωνο

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{yy} = \frac{hb^3}{48}$$

$$I_{xy} = 0$$

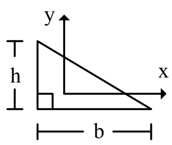


Ορθογώνιο τρίγωνο (A: το εμβαδόν του τριγ.)

$$I_{xx} = \frac{Ah^2}{18}$$

$$I_{yy} = \frac{Ab^2}{18}$$

$$I_{xy} = \frac{1}{72}b^2h^2$$

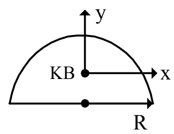


Ημικύκλιο

$$I_{xx} = 0{,}11R^4$$

$$I_{yy} = 0{,}393R^4$$

$$I_{xy} = 0$$



Ροπές αδράνειας σύνθετης επιφάνειας

$$I_{xx} = I_{xx}{}^{(1)} + I_{xx}{}^{(2)} + ... + I_{xx}{}^{(n)}$$

$$I_{yy} = I_{yy}{}^{(1)} + I_{yy}{}^{(2)} + ... + I_{yy}{}^{(n)}$$

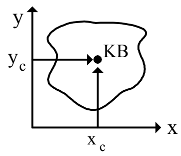
$$I_{xy} = I_{xy}{}^{(1)} + I_{xy}{}^{(2)} + ... + I_{xy}{}^{(n)}$$

Οι ροπές αδράνειας υπολογίζονται πρώτα στο Κ.Β. της κάθε επιφάνειας και έπειτα ανάγονται με το θ.Steiner στο Κ.Β. της επιφάνειας και προστίθενται.

Ροπή αδράνειας α΄ βαθμού (στατική)

$$S_x = Ay_C$$

$$S_y = Ax_C$$



Στατική ροπή αδράνειας σύνθετης επιφάνειας

$$S_X = S_X{}^{(1)} + S_X{}^{(2)} + ... + S_X{}^{(n)} =$$
$$= A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + ... + A_n y_{C_n}$$

$$S_y = S_y{}^{(1)} + S_y{}^{(2)} + ... + S_y{}^{(n)} =$$
$$= A_1 x_{C_1} + A_2 x_{C_2} + ... + A_n x_{C_n}$$

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Στερεά σε ισορροπία

Για να βρίσκεται ένα στερεό σε ισορροπία στο επίπεδο πρέπει να πληρούνται οι εξισώσεις ισορροπίας :

$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M = 0$

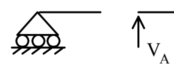
Στις εξισώσεις συμπεριλαμβάνονται όλες οι δυνάμεις και ροπές που ενεργούν στο σώμα (φορτία κ΄ αντιδράσεις)

Είδη στήριξης και αντιδράσεις

Το κάθε είδος στήριξης εισάγει και τις αντίστοιχες αντιδράσεις.

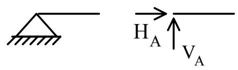
Κύλιση

Δηλαδή : επιτρέπει την οριζόντια μετατόπιση και την στροφή.



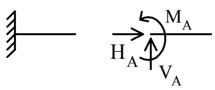
Άρθρωση

Δηλαδή : επιτρέπει την στροφή.



Πάκτωση

Δηλαδή : δεν επιτρέπει κανενός είδους μετακίνηση.



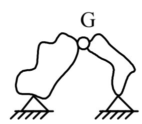
Οι αντιδράσεις στα ισοστατικά προβλήματα υπολογίζονται από τις εξισώσεις ισορροπίας

Στερεά με ενδιάμεση άρθρωση

(Δοκοί ή Δικτυώματα)

Στις τρεις εξισώσεις ισορροπίας προστίθεται η :

$\Sigma M_G = 0$



Ισοστατικά προβλήματα

Ισοστατικοί λέγονται οι φορείς στους οποίους το πλήθος των αντιδράσεων ισούται με το συνολικό αριθμό των διαθέσιμων εξισώσεων ισορροπίας.

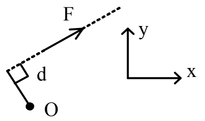
Υπερστατικά προβλήματα

Ο αριθμός των αντιδράσεων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων ισορροπίας.

© Δωρεάν Διάθεση

Ροπή δύναμης F ως προς σημείο O

- διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής
- προεκτείνω το φορέα της F
- φέρνω την κάθετη προς το O (μοχλοβραχίονας)
- $M = F \cdot d$
- για το πρόσημο βρίσκω τη φορά περιστροφής της απόσταση γύρω από το O



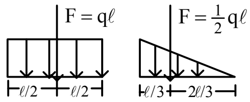
Όταν η δύναμη και ο μοχλοβραχίονας βρίσκονται επί του επιπέδου x-y το διάνυσμα της ροπής έχει την διεύθυνση του άξονα z.

Είδη φορτίσεων

- Συγκεντρωμένες δυνάμεις
- Συγκεντρωμένες ροπές
- Κατανεμημένα Φορτία/ ροπές

Κατανεμημένα φορτία

Τα φορτία ισοδυναμούν με δυνάμεις συγκεντρωμένες ίσες με το εμβαδόν της κατανομής που ασκούνται στο κέντρο βάρος της εκάστοτε διανομής.



Μονάδες στο S.I.

Μήκος → m Γωνία→ rad
Δύναμη → N Ροπή → Nm
Τάση → $N/m^2 = Pa$

Προθέματα

$1k = 10^3$ $1M = 10^6$ $1G = 10^9$

$1m = 10^{-3}$ $1\mu = 10^{-6}$

Μετατροπές

$1kp = 9.81N ... 1t = 1000kp$

$1Pa = 1N/m^2 ... 1at = 1kp/cm^2$

ΑΠΛΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Φορτία διατομής :
Είναι οι εσωτερικές δυνάμεις του φορέα. Αυτές ενεργούν σε μια διατομή και είναι :
N : αξονική δύναμη, Q : τέμνουσα δύναμη,
M : ροπή κάμψης.

Διαγράμματα N, Q, M

Σχεδιάζονται κατά μήκος του φορέα και μας δείχνουν πως μεταβάλλονται τα N, Q, M σε κάθε θέση.

Προσδιορισμός N, Q, M

Αντικαθιστούμε τις στηρίξεις με τις αντιδράσεις τους και φτιάχνω το Διάγραμμα Ελευθέρου Σώματος (Δ.Ε.Σ).
Υπολογίζουμε τις αντιδράσεις στήριξης από τις εξισώσεις ισορροπίας. Βρίσκουμε τα χαρακτηριστικά σημεία όπως τα:

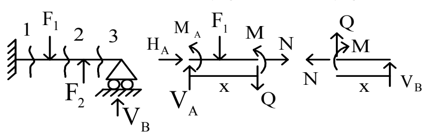
- άκρα δοκού
- σημεία που ασκούνται συγκεντρωμένες φορτίσεις
- σημεία που αρχίζουν και τελειώνουν σε κατανεμημένα φορτία

Σε κάθε περιοχή μεταξύ δυο διαδοχικών χαρακτηριστικών σημείων κάνουμε μία τομή σε τυχαία θέση που απέχει απόσταση x από το άκρο της δοκού.
Υπολογίζουμε τα N, Q, M από τις εξισώσεις ισορροπίας ενός από τα δύο τμήματα με τις εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν από την τομή, με θετική φορά αυτή των N, Q, M.

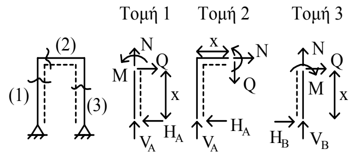
Θετικά πρόσημα για N, Q, M

Το N είναι θετικό όταν είναι εφελκυστικό.
Το M καθορίζεται από τη θετική ίνα με φορά από αυτήν στην άλλη πλευρά.

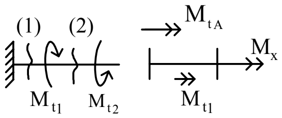
- **οριζόντιοι δοκοί**



- **πλαίσια**



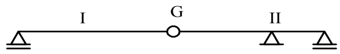
Αν υπάρχουν στρεπτικές ροπές τότε ψάχνω και την εσωτερική στρεπτική ροπή M_x:



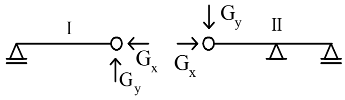
$\Sigma M_x = 0 \rightarrow M_x = -M_t$

ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Δοκός Gerber ή αρθρωτή δοκός :



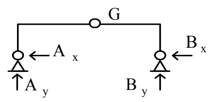
Η άρθρωση χωρίζει την αρθρωτή δοκό σε στηρίζον τμήμα II και στηριζόμενο I και υπολογίζονται οι G_x, G_y στην άρθρωση.



Οι G_x και G_y μεταφέρονται σαν φορτία στη στηρίζουσα δοκό II και επιλύεται η II.

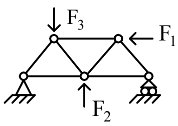
Τριαρθρωτό τόξο :

Η άρθρωση G χωρίζει το φορέα σε δυο τμήματα ισοδύναμα από άποψη στατικής λειτουργίας. Χρησιμοποιούμε τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$ και $\Sigma M=0$ όλου του φορέα και την εξίσωση $\Sigma M_G = 0$ του δεξιού ή του αριστερού τμήματος, για τον υπολογισμό των τεσσάρων εξωτερικών αντιδράσεων.



ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

Στερεά που απαρτίζονται μόνο από ράβδους.



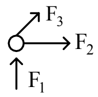
Κάθε ράβδος καταπονείται μόνο με αξονικές δυνάμεις.
Στερεό είναι ένα δικτύωμα όταν:

- είναι παράθεση τριγώνων
- αποτελείται από δύο στερεά που συνδέονται με 3 ράβδους που δεν συντρέχουν
- αποτελείται από τρία στερεά που συνδέονται ανά δύο με δύο ράβδους που τέμνονται σε μη συνευθειακά σημεία

Οι αντιδράσεις υπολογίζονται όπως και για δοκούς από τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας. Οποιαδήποτε ράβδος μπορεί να αντικατασταθεί από την αντίστοιχη δύναμης της.
Αν σε ένα δικτύωμα θεωρήσουμε όπου,
ρ: αριθμός ράβδων, α: αριθμός αντιδράσεων
η_0: αριθμός κόμβων τότε,
Αν ρ+α = $2\eta_0$ τότε είναι **ισοστατικό**
Αν ρ+α >$2\eta_0$ τότε είναι **υπερστατικό**
Αν ρ+α<$2\eta_0$ τότε είναι **υποστατικό** ή μηχανισμός

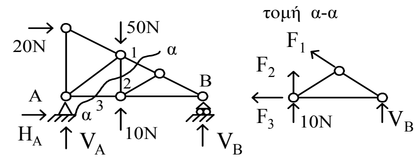
Μέθοδοι υπολογισμού δικτυωμάτων

1) Μέθοδος κόμβων: Απομονώνουμε έναν κόμβο και σχεδιάζω τις δυνάμεις πάνω του



$\left.\begin{array}{l}\Sigma Fx = 0 \\ \Sigma Fy = 0\end{array}\right\}$ Από τις εξισώσεις ισορροπίας του κόμβου βρίσκουμε τις άγνωστες δυνάμεις των ράβδων

2) Μέθοδος Ritter: Χωρίζουμε το δικτύωμα σε δύο **στερεά κόβοντας τουλάχιστον τρεις ράβδους**.



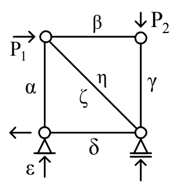
Για κάθε στερεό αφού αντικατασταθούν οι ράβδοι που κόβονται με δυνάμεις ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma Fx = 0 \\ \Sigma Fy = 0 \\ \Sigma M = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}H_A = ... \\ V_B = ... \\ H_B = ...\end{array} \quad \left.\begin{array}{l}\Sigma Fx = 0 \\ \Sigma Fy = 0 \\ \Sigma M = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}F_1 = ... \\ F_2 = ... \\ F_3 = ...\end{array}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούνται μόνο οι εξισώσεις ΣΜ= 0, π.χ. αν ζητώ την δύναμη της ράβδου 2 παίρνω ΣΜ = 0 ως προς το σημείο τομής των δυνάμεων 1 και 3.

Μέθοδος Cremona

Είναι γραφική (σχεδιαστική) μέθοδος επίλυσης δικτυωμάτων.
Χωρίζουμε το δικτύωμα σε περιοχές α,β,γ,…ν.

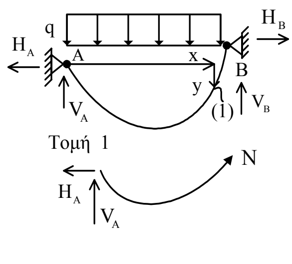


Οι δυνάμεις συμβολίζονται με τα γράμματα των εκατέρωθεν περιοχών τους π.χ. η P_1 είναι α → β η P_2 είναι $\overset{\beta}{\underset{\gamma}{\downarrow}}$ κοκ. Ομοίως και οι δυνάμεις των ράβδων

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων των ράβδων σχεδιάζουμε τα δυναμοπολύγωνα του κάθε κόμβου. Τα μήκη των διανυσμάτων στα διαγράμματα Gremona μας δίνουν με κατάλληλη κλίμακα τις δυνάμεις των ράβδων.

ΕΥΚΑΜΠΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ – ΚΑΛΩΔΙΑ

- Κύριο χαρακτηριστικό των καλωδίων είναι ότι δεν παραλαμβάνουν ροπή κάμψης δηλαδή M(x)=0 αλλά και Q(x)=0. Επομένως σε τυχαία θέση εμφανίζεται μόνο αξονική δύναμη πάντα εφαπτομένη σε αυτό.
- Τα καλώδια φορτίζονται πάντα με κατακόρυφες φορτίσεις.



Για την εύρεση του N. Από Τομή 1 έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = 0 \rightarrow N_x = ... \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow N_y = ...\end{array}\right\} \Rightarrow N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$$

Η εξίσωση ΣΜ=0 χρησιμοποιείται είτε για την εξαγωγή της συνάρτησης y=y(x) που δίνει το σχήμα του καλωδίου είτε για την εύρεση των αντιδράσεων.

ΤΡΙΒΗ

$P > T_s = \mu_s N$ έχουμε ολίσθηση
$P < T_s = \mu_s N$ έχουμε κίνηση
Η δύναμη της τριβής όταν έχουμε ολίσθηση είναι : $T = \mu N$
μ_s : συντ/στής στατικής τριβής
μ : συντ/στής τριβής ολίσθησης