ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΕΞΕΤΑΣΗ 3^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2018 ΟΜΑΔΑ Α

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ: α) Αν y_1, y_2 λύσεις της $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $p(x), q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε ανοιχτό διάστημα I να δειχθεί ότι η ορίζουσα Wronski δίνεται από τη σχέση

$W(y_1, y_2)(x) = c\exp\left[-\int p(x)dx\right]$ όπου c σταθερά. (μον. 1)

β) Τρεις λύσεις μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης είναι οι $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x^2 + e^{2x}, f_3(x) = 1 + x^2 + 2e^{2x}$. Να βρεθεί η γενική λύση. (μον.0.75)

γ) Να δοθεί η μορφή της γενικής λύσης της εξίσωσης

$y''' - 3y'' + y' - 3y = t^2 + 2\cos t$. (μον. 0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ: α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$. Διατυπώστε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε το σημείο $x_0 = \infty$ να είναι ομαλό σημείο για τη διαφορική εξίσωση(υπόδειξη κάντε την αντικατάσταση $\xi = \frac{1}{x}$). (μον. 1)

β) Δίνεται η διαφορική εξίσωση Legendre $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$. Αν $P_4(t), P_8(t)$ είναι οι πολυωνυμικές λύσεις της εξίσωσης για $a = 4{,}8$ αντιστοίχως να διατυπωθεί και αποδειχθεί η σχέση ορθογωνιότητας που συνδέει τα πολύωνυμα Legendre $P_4(t), P_8(t)$. (μον. 0.5)

γ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση

$$y'' + y = \begin{cases} \cos t, 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ 2, \dfrac{\pi}{2} \le t < \infty \end{cases} \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0 .$$ (μον.1)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να βρεθεί η γενική λύση της η δ. ε. $(x+2)\sin y\,dx + x\cos y\,dy = 0$. Να βρεθεί, αν υπάρχει, ειδική λύση με $y(1) = 1$. (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$. (μον. 1)

γ) Δίνεται το ΠΑΤ $y' = t^2 + y^{-2}, y(t_0) = y_0$. Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του ty επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του Θ. ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για $y(t_0) = y_0$ με ζεύγος τιμών (t_0, y_0) δικής σας επιλογής (χωρίς να γίνουν υπολογισμοί). (μον. 0.75)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ: Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x}$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(μον. 2.25)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}$, $L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$, $L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s)$,

αν $F(s) = L(f(t))$ και $u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \ge a, \end{cases}$, $a \ge 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες, **Καλή επιτυχία**