ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Επί πτυχίω εξεταστική στη Μαθηματική Ανάλυση Ι

27/6/2017

Θ1. (α′) Έστω A, B μη κενά σύνολα πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x \le y$, για κάθε $x \in A$ και κάθε $y \in B$. Να δείξετε ότι $\inf B \ge x$, για κάθε $x \in A$. (1 μον.)

(β′) Έστω (α_ν) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} = \rho < 1\,.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = 0\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση.

(α′) Αν $\inf B < x$, για κάποιο $x \in A$, τότε επιλέγοντας $\varepsilon = x - \inf B > 0$, από το χαρακτηρισμό του infimum, θα υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε

$$y < \inf B + \varepsilon = x$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\inf B \ge x$, για κάθε $x \in A$.

(β′) Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έτσι ώστε $0 < \rho + \varepsilon < 1$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} - \rho| < \varepsilon$, για κάθε $\nu \ge \nu_0$. Επομένως

$$\sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} < \rho + \varepsilon = \lambda < 1\,, \quad \text{για κάθε } \nu \ge \nu_0$$

και κατά συνέπεια

$$0 \le |\alpha_\nu| < \lambda^\nu\,, \quad \text{για κάθε } \nu \ge \nu_0\,.$$

Συνεπώς, αφού $\lambda < 1$, έχουμε ότι $\lim_{\nu\to+\infty} \lambda^\nu = 0$. Άρα και $\lim_{\nu\to+\infty} |\alpha_\nu| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = 0$.

■

Θ2. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\nu} + \ln\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) \right)\,.$$

(1,5 μον.)

Λύση. Για κάθε $\nu \ge 2$ είναι $a_\nu = \frac{2}{\nu} + \ln\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) = 2/\nu + \ln(1-1/\nu) > 0$. Αν $b_\nu = 1/\nu$, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} = 2 + \lim_{\nu\to\infty} \frac{\ln(1-1/\nu)}{1/\nu} = 2 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} 2 - \lim_{x\to0^+} \frac{1}{1-x} = 1\,.$$

Επειδή ως γνωστόν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(1/\nu)$ αποκλίνει, $\sum_{\nu=1}^{\infty}(1/\nu) = \infty$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{\nu} + \ln\frac{\nu-1}{\nu}\right)$ θα αποκλίνει. Δηλαδή

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\nu} + \ln\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right) \right) = \infty\,.$$

■

Θ3. (α′) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\ .\end{cases}$$

Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. (1 μον.)

(β′) Θεωρούμε τη συνάρτηση $y=\tan x$ στο διάστημα $(-\pi/2,\,\pi/2)$. Αν $y=\arctan x$, $x\in\mathbb{R}$, είναι η αντίστροφη της $y=\tan x$, δείξτε ότι

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Αν $a\neq 0$, υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dx}(\arctan\frac{x}{a})$. (1 μον.)

Λύση.

(α′) Έστω $x_n=1/n\pi$ και $y_n=1/(2n\pi+\pi/2)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Τότε $x_n,y_n\to 0$, ενώ

$$f(x_n)=\sin n\pi=0 \text{ και } f(y_n)=\sin(2n\pi+\pi/2)=1 \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Δηλαδή $f(x_n)\to 0$ και $f(y_n)\to 1$. Επομένως το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(β′) Έστω $y=\arctan x$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε $x=\tan y$ με $y\in(-\pi/2,\,\pi/2)$ και επομένως

$$(\arctan x)'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}\,,\quad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Αν $a\neq 0$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$\frac{d}{dx}(\arctan\frac{x}{a})=\frac{1}{1+(x/a)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{a^2}{a^2+x^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}\,.$$

■

Θ4. Αν $f(x):=\frac{1}{2}\sin(\ln(x+1))$, $x>-1$, χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor για την f μέχρι τον όρο δεύτερης τάξης και κέντρο το $n\in\mathbb{N}^*$, δείξτε ότι

$$|f(n-1)+f(n+1)-2f(n)|=|f''(\xi)|\,,\quad \text{για κάποιο } \xi\in(n-1,n+1)\,,$$

με $|f''(\xi)|<\frac{1}{n^2}$. (2 μον.)

Λύση. Από τον τύπο Taylor έχουμε

$$f(n-1)=f(n)-f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\,,\ \text{για κάποιο } \xi_1\in(n-1,n)$$

και

$$f(n+1)=f(n)+f'(n)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\,,\ \text{για κάποιο } \xi_2\in(n,n+1)\,.$$

Τότε,

$$f(n+1)+f(n-1)-2f(n)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\,.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι

$$\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]=f''(\xi)\,,\ \text{για κάποιο } \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(n-1,\,n+1)$$

και επομένως

$$|f(n-1)+f(n+1)-2f(n)| = |f''(\xi)|\,, \quad \text{για κάποιο } \xi \in (n-1, n+1)\,.$$

Επειδή

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln(x+1))}{2(x+1)} \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{\sin(\ln(x+1))+\cos(\ln(x+1))}{2(x+1)^2}\,,$$

είναι $|f''(x)| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$ και κατά συνέπεια

$$|f''(\xi)| \leq \frac{1}{(\xi+1)^2} < \frac{1}{n^2}\,. \qquad (n < \xi+1 < n+2)$$

■

Θ5. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Εφαρμογή. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{a\to 0}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+a^2x^{2017}}}{1+x^2}\,dx\,.$$

(2 μον.)

Λύση. Επειδή $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, είναι $\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$. Αν

$$m = \min_{a\leq x\leq b} f(x) \;\text{ και }\; M = \max_{a\leq x\leq b} f(x)\,,$$

τότε

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)\,, \quad \forall x \in [a,b]\,. \tag{1}$$

Επειδή το γινόμενο fg είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, από τη (1) έχουμε

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{2}$$

(ι) Αν $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, τότε από τη (2) θα είναι και $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Επομένως ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,,$$

για κάθε $\xi \in [a,b]$.
(ιι) Αν $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, από τη (2) έχουμε

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M\,.$$

Επομένως από το θεώρημα του Bolzano ή ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

και ισοδύναμα

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

<u>*Εφαρμογή*</u>. Επειδή οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{1+a^2x^{2017}}$ και $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ είναι θετικές και συνεχείς στο διάστημα $[0,1]$, είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+a^2x^{2017}}}{1+x^2}\,dx &= \sqrt{1+a^2\xi^{2017}}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \sqrt{1+a^2\xi^{2017}}\cdot \arctan x\big|_{x=0}^{x=1}\\ &= \sqrt{1+a^2\xi^{2017}}\cdot\arctan 1 = \frac{\pi}{4}\sqrt{1+a^2\xi^{2017}}\,,\end{aligned}$$

για κάποιο ξ, με $0\le\xi\le 1$. Επειδή $\lim_{a\to 0}\sqrt{1+a^2\xi^{2017}}=1$, είναι

$$\lim_{a\to 0}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+a^2x^{2017}}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

■

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες