

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκων: Ι. Κολέτσος

912B

1. α) Να περιγράψετε την Γενική Επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση ενός ομαλού $n \times n$ γραμμικού συστήματος $Ax=b$. Εν συνεχεία να δειχθεί ότι η μέθοδος συγκλίνει αν $\|B\|<1$ για κάποια φυσική νόρμα πίνακα, όπου B ο πίνακας των επαναλήψεων της μεθόδου.

β) Να εξετάσετε αν η Επαναληπτική Μέθοδος Jacobi συγκλίνει για 2×2 γραμμικά συστήματα με πίνακα συντελεστών των πίνακα: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$.

γ) Να δειχθεί ότι η μέθοδος Gauss-Seidel για συστήματα με πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -a & a \end{pmatrix}$, $a>0, b>0, a>b$, συγκλίνει. (3)

2. α) Να υπολογιστεί το πολυνόμιο παρεμβολής Lagrange $p(x)$ για την συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$ στα σημεία $x_0=0, x_1=1/4, x_2=1/2, x_3=3/4$.

β) Να δοθεί άνω φράγμα του σφάλματος $|f(x)-p(x)|$, για $x=1$ και για $x=1/3$.

γ) Να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$x_0^4 L_0(x) + x_1^4 L_1(x) + x_2^4 L_2(x) + x_3^4 L_3(x) = x^4 - (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

$$\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right\}. \quad (3)$$

3. α) Η εξίσωση: $x=1-(1/4)\sin x$, (το x σε ακτίνια), (1)

έχει μοναδική ρίζα ρ στο \mathbf{R} . Να υπολογιστούν οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις της ρίζας ρ με την μέθοδο διχοτόμησης και αρχικό διάστημα το $[0, 1]$. Να δειχθεί η γενική εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου διχοτόμησης, και στην συνέχεια να υπολογιστεί πόσο το πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση που υπολογίσατε από την ρίζα ρ .

β) Να δειχθεί ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος: $x_k=1-(1/4)\sin x_k$,

$k=0,1,2,\dots$

συγκλίνει στην ρίζα ρ της (1), για κάθε $x_0 \in \mathbf{R}$. Να γίνουν τρεις επαναλήψεις με $x_0=0.5$. (2)

4. α) Να υπολογιστεί ο απλός τύπος Τραπεζίου χωρίς όρο σφάλματος, για την προσέγγιση του ορισμένου ολοκληρώματος και με βάση αυτόν ο αντίστοιχος σύνθετος.

β) Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$. Να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα αυτό όταν $h=0.25$, με τον αντίστοιχο σύνθετο. Αν ο σύνθετος τύπος Τραπεζίου

εφαρμοστεί για τον υπολογισμό του I με σφάλμα το πολύ $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$, πόσα σημεία πρέπει να χρησιμοποιηθούν. ($E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$) (2)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

© ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30 ΩΡΕΣ ©