Κβαντομηχανική ΙΙ: Επαναληπτική Εξέταση
Σεπτέμβρης 2016
Κλειστά βιβλία και κινητά τηλέφωνα
Γράψτε και τα τρία ισοδύναμα θέματα.

Θέμα 1: (α) Αποδείξτε τη σχέση που δίνει τη χρονική μεταβολή της μέσης τιμής ενός τελεστή A:

$$\frac{d < A >}{dt} = \frac{1}{i\hbar} < [A, H] > + \frac{\partial < A >}{\partial t},$$

όπου H είναι η Χαμιλτονιανή.

(β) Ειδικότερα, αν H είναι η Χαμιλτονιανή ενός αρμονικού ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω, υπολογίστε τις ποσότητες $\frac{d<x>}{dt}$ και $\frac{d<p>}{dt}$ και δείξτε ότι:

$$\frac{d^2 < x >}{dt^2} + \omega^2 < x >= 0.$$

Θέμα 2: Υπολογίστε τους μεταθέτες του τελεστή θέσης x και του τελεστή ορμής p_x με τις συνιστώσες του τελεστή της στροφορμής L_x, L_y, L_z και με την συνιστώσα της στροφορμής $\hat{n} \cdot \vec{L}$, όπου $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ και $\hat{n}$ τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα.

Θέμα 3 Σωματίδιο μάζας m κινείται μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού που εκτείνεται στο διάστημα $0 < x < L$.

(α) Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις ψ_n και τις ιδιοτιμές της ενέργειας E_n του σωματιδίου.

(β) Μία μικρή διαταραχή $\hat{V}(x)$ προστίθεται στο σύστημα:

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} -\frac{V_0}{2} & \gamma\iota\alpha \quad 0 < x < \frac{L}{2}, \\ +\frac{V_0}{2} & \gamma\iota\alpha \quad \frac{L}{2} < x < L, \end{cases}$$

όπου $V_0 > 0$. Να υπολογίσετε τις (συνολικές) ενέργειες E_n του σωματιδίου χρησιμοποιώντας την θεωρία διαταραχών μέχρι πρώτη τάξη.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},\ Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta,\ Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ Y_{1,+1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{+i\phi}\sin\theta.$$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}},\ \ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}},\ \hat{a}|n>= \sqrt{n}|n-1>,\ \hat{a}^\dagger|n>= \sqrt{n+1}|n+1>.$$

$$E_n^{(1)} =< n|V|n>,\ \ E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n}\frac{V_{kn}V_{nk}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$\hat{S}_\pm|s,m>= \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m\pm 1)}|s,m\pm 1>,\ \hat{S}_+|s,+s>= 0,\ \hat{S}_- s,-s>= 0,$$

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = E^{(1)}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

$$[A,BC] = [A,B]C + B[A,C],\ [BC,A] = [B,A]C + B[C,A],\ [x_k,p_l] = i\hbar\delta_{kl}$$

$$\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2,\ [L_k, L_m] = i\hbar\epsilon_{kmn}L_n,\ [\vec{L}^2, L_k] = 0.$$

$$\vec{L}^2|l,m>= l(l+1)\hbar^2|l,m>,\ L_3|l,m>= m\hbar|l,m>.$$

$$< l_1, m_1|l_2, m_2>= \delta_{l_1,l_2}\delta_{m_1,m_2},\ \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l}|l,m>< l,m| = 1,$$

$$\int d\Omega|\theta,\phi>< \theta,\phi| = 1,\ Y_{l,m}(\theta,\phi) \equiv< \theta,\phi|l,m>$$

$$\vec{L}^2 Y_{l,m} = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m},\ L_3 Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m},\ m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

$$\int d\Omega\ Y_{l_1,m_1}^* Y_{l_2,m_2} = \delta_{l_1,l_2}\delta_{m_1,m_2},\ \ \int d\Omega \equiv \int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta),\ \ Y_{l,m} \equiv Y_{l,m}(\theta,\phi).$$

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\phi),\ n = 1,2,3,\dots,\ l = 0,1,\dots,n-1,\ m = -l,-l+1,\dots,l-1,l.$$

$$E_n = -\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2},\ R_{n,l}(r) = c_{n,l}P_{n,l}\exp\left[-\frac{Zr}{na_0}\right],\ a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2},\ \int_0^{+\infty}drr^2\left[R_{n,l}\right]^2 = 1.$$

$$R_{1,0} = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{Zr}{a_0}\right]$$

$$R_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right)\exp\left[-\frac{Zr}{2a_0}\right]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{24}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2} r\exp\left[-\frac{Zr}{2a_0}\right]$$