Ανάλυση ΙΙ – Λύσεις Θεμάτων *Επαναληπτικής 2008*

Προσοχή μπορεί να παίζουν από μικρά εώς σοβαρά λάθη!

ΘΕΜΑ 1ο

(α)

Η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}, x\in[0,+\infty]$ είναι θετική και συνεχής στο κλειστό διάστημα [0,2].

Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int_0^2 e^{-x^2}$ συγκλίνει.

Για $x\geq 2$, ισχύει $e^{-x^2}<e^{-x}\Rightarrow\int_2^{+\infty} e^{-x^2}\leq\int_2^{+\infty} e^{-x}=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t e^{-x}dx=\lim_{t\to+\infty}[-e^{-x}]_2^t=\lim_{t\to+\infty}(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^t})=\frac{1}{e^2}$.

Επομένως, συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{+\infty} e^{-x^2}$.

Άρα, το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$ συγκλίνει, ως άθροισμα ολοκληρωμάτων που συγκλίνουν.

(β) Έχουμε:

$$f(x,y)=e^x cosy\Rightarrow f(0,0)=1$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^x cosy\Rightarrow\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=1$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-e^x siny\Rightarrow\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=e^x cosy\Rightarrow\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}=1$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-e^x cosy\Rightarrow\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}=-1$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=-e^x siny\Rightarrow\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=0$$

Άρα, το πολυώνυμο Taylor της f βαθμού ένα και δύο αντίστοιχα είναι,

$$T_1 f((0,0),(x,y))=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left((x-0)\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}+(y-0)\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right)=1+x$$

$$T_2 f((0,0),(x,y))=$$
$$=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left((x-0)\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}+(y-0)\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left((x-0)^2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}+2(x-0)(y-0)\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}+(y-0)^2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}\right)=$$
$$=x+1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+x+1$$

ΘΕΜΑ 2ο

(α)

$$\vec{r}=(x,y,z)$$
$$\vec{r}_0=\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$$
$$f=x^2+4y^2+10z-10$$
$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(2x,8y,10)\Rightarrow\vec{\nabla} f\left(1,1,\frac{1}{2}\right)=(2,8,10)$$

Άρα, η εξίσωση της επιφάνειας του εφαπτόμενου επιπέδου είναι,

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{\nabla} f\left(1,1,\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x-1,y-1,z-\frac{1}{2}\right)\cdot(2,8,10)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+8y+10z-15=0$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις του κάθετου στο εφαπτόμενο επίπεδο διανύσματος στο σημείο αυτό είναι:

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0+\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}t \\ y=y_0+\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}t \\ z=z_0+\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial z}t \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=1+8t \\ z=\dfrac{1}{2}+10t \end{array}\right\}$$

(β) Έχουμε

$\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$, όπου

$F_1=x+3y+\lambda z$

$F_2=\mu x+4y+z$

$F_3=2x+\nu y+5z$

Επομένως, αφού το διανυσματικό πεδίο είναι αστρόβιλο, είναι

$$rot\,\vec{F}=0\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{F}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{i}(\nu-1)+\vec{j}(\lambda-2)+\vec{k}(\mu-3)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\nu=1\\ \lambda=2\\ \mu=3\end{array}\right\}$$

ΘΕΜΑ 3ο

(α) ?
(β)

$$\vec{\nabla}(f\cdot\vec{F})=\frac{\partial(fP)}{\partial x}+\frac{\partial(fQ)}{\partial y}+\frac{\partial(fR)}{\partial z}=P\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial P}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+f\frac{\partial Q}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial R}{\partial z}=$$

$$=f\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=f\cdot\vec{\nabla}F+P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=$$

$$=f\cdot\vec{\nabla}F+\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R)=f\cdot\vec{\nabla}F+\vec{F}\vec{\nabla}f$$

ΘΕΜΑ 4ο

(α)

$f(x,y)=x^2+y^2-x^2y^2$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι αυτά για τα οποία ισχύει: $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0\ \ (*)$.

Έχουμε

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}2x-2xy^2=0\\ 2y-2yx^2=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x(1-y^2)=0\\ y(1-x^2)=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=0,y=\pm1\\ x=\pm1,y=0\end{Bmatrix}$$

Ο συνδιασμός των λύσεων δίνει 9 σημεία. Όμως, αυτά για τα οποία ισχύει η σχέση $(*)$ είναι μόνο τα εξής: (0,0), (1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1). Αυτά είναι τα κρίσιμα σημεία και θα τα ταξινομήσουμε με τη βοήθεια του κριτηρίου δεύτερων παραγώγων, αφού οι μερικές παράγωγοι δύτερης τάξης της f υπάρχουν και είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της f.

Στον παρακάτω πίνακα κάθε στήλη αντιστοιχεί σε ένα κρίσημο σημείο και κάθε γραμμή σε μια μερική παράγωγο δεύτερης τάξης. Έτσι, κάθε κελί του πίνακα δίνει την τιμή της συγκεκριμένης μερικής παραγώγου δεύτερης τάξης στο συγκεκριμένο σημείο.

	(0,0)	(1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,-1)
$f_{xx}=2-2y^2$	2	0	0	0	0
$f_{yy}=2-2x^2$	2	0	0	0	0
$f_{xy}=-4xy$	0	-4	4	4	-4
$f_{yx}=-4xy$	0	-4	4	4	-4

- Για το σημείο (0,0):

$$\Delta=\begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0$$

και

$f_{xx}(0,0)=2>0$. Επομένως, το (0,0) είναι τοπικό ελάχιστο.

- Για το σημείο (1,1):

$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$. Επομένως, το (1,1) είναι σημείο σέλας.

- Για το σημείο (-1,1):

$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$. Το (1,-1) είναι σαγματικό.

- Για το σημείο (1,-1):

$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$. Και το (1,-1) είναι σαγματικό.

- Για το σημείο (-1,-1):

$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$. Άρα και το (-1,-1) είναι σημείο σέλας.