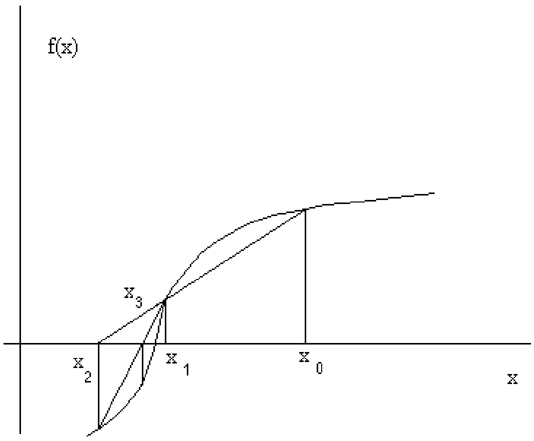
ΤΕΜΦΕ 4ο Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση Ι
1η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέθοδος Müller

Αν θέλαμε να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τη μέθοδο Secant θα βλέπαμε ότι σε κάθε βήμα φέρουμε την ευθεία που διέρχονται από τις εικόνες δύο σημείων π.χ. x_0 και x_1. Το επόμενο σημείο της προσέγγισης x_2 είναι η τομή της ευθείας με τον άξονα των x. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τα σημεία x_1 και x_2.



Αν αντί για δύο δοθέντα σημεία σε κάθε βήμα είχαμε τρία, π.χ. x_0, x_1 και x_2, τότε θα μπορούσαμε να φέρουμε από τις εικόνες τους μία παραβολή. Το επόμενο σημείο της προσέγγισης (το x_3) είναι η τομή της παραβολής με τον άξονα των x. Στο επόμενο βήμα, η διαδικασία επαναλαμβάνεται για τα σημεία x_1, x_2 και x_3.

Η μέθοδος που περιγράψαμε ονομάζεται μέθοδος του Müller και ο επαναληπτικός της τύπος δίνεται από τους ακόλουθους τύπους:

$$c = f(x_2)$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2\left[f(x_1) - f(x_2)\right] - (x_1 - x_2)^2\left[f(x_0) - f(x_2)\right]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)\left[f(x_0) - f(x_2)\right] - (x_0 - x_2)\left[f(x_1) - f(x_2)\right]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

ενώ η εξίσωση της παραβολής είναι η

$$p(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c\,.$$

Η παραβολή μπορεί να τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία, οπότε υπάρχουν δύο επιλογές για το x_3. Επιλέγουμε ως νέα προσέγγιση το σημείο τομής που είναι πιο κοντά στην προηγούμενη με την κατάλληλη επιλογή του προσήμου στον παρανομαστή. Στον τύπο θέτουμε + ή – ανάλογα ώστε ο παρανομαστής να είναι έχει το μεγαλύτερο δυνατό μέτρο.

Σας δίνεται η ακόλουθη πολυωνυμική εξίσωση

$$x^4 + 2x^3 + (-3a - \frac{5}{4})x^2 + 2a^2x - a^4 - 3a^3 - \frac{5a^2}{4} = 0$$

όπου το a ισούται με το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας αυξημένο κατά ένα. Για την εξίσωση αυτή γνωρίζουμε ότι έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα $\left[-a-5, a+5\right]$και ένα ζεύγος μιγαδικών ριζών.

Ερωτήματα

1. Εκμεταλλευόμενοι τις δυνατότητες γραφικών του MATLAB, προσδιορίστε δύο διαστήματα (με πλάτος από 0.8 έως 1.2) που το καθένα να περιέχει μία από τις δύο πραγματικές ρίζες.
2. Χρησιμοποιώντας ως αρχικές τιμές τα άκρα του κάθε διαστήματος για τη Secant και ένα τρίτο εσωτερικό σημείο για την Müller προσεγγίστε αυτές τις πραγματικές ρίζες και με τις δύο μεθόδους.
3. Με βάση τα αποτελέσματα συγκρίνετε τις δύο μεθόδους. Ποια από τις δύο εμφανίζει να έχει μεγαλύτερη τάξη σύγκλισης.
4. Επιλέγοντας ως αρχικές τιμές άκρα διαστήματος που περιέχουν την αρχή των αξόνων για τη Secant και ένα τρίτο εσωτερικό σημείο για την Müller, προσπαθήστε να προσεγγίσετε τη μιγαδική ρίζα και με τις δύο μεθόδους. Σχολιάστε τα αποτελέσματα σας.

Κώδικας

Η μέθοδος του Müller αν προγραμματιστεί κατάλληλα μπορεί να προσεγγίσει και μιγαδικές ρίζες και σε αυτή την περίπτωση κώδικας της σε MATLAB είναι ο ακόλουθος:

```
function [x,xlist,iter] = muler(f,x0,x1,x2,tol,maxit)
% Root of f(x)=0 by muler method.
% method terminates when relative change > tol
% or maximum number exceeds of iterations
if nargin < 4,
   fprintf('Insufficient input \n');     break;
end;
if nargin < 5,tol = eps; end;
if nargin < 6, maxit = 50;  end;
f0 = feval(f,x0); f1 = feval(f,x1);
iter = 0; xdiff = inf;
xlist=[x0;x1;x2];
while xdiff >= tol
   f2 = feval(f,x2);
   c0=(f1-f0)/(x1-x0);
   c1=(f2-f1)/(x2-x1);
   d0=(c1-c0)/(x2-x0);
   s=c1+d0*(x2-x1);
    dd=sqrt(s^2-4*f2*d0);
    if (abs(s-dd)<abs(s+dd)),
       ss=1;
    else
       ss=-1;
    end;
    x = x2 - 2*f2/(s+ss*dd);
    xdiff = abs(x-x2)/abs(x);
    xlist=[xlist;x];
    iter = iter + 1;
    if iter >= maxit
      disp('Not converged after maxit iterations.');
      break;
   end
   x0=x1;f0=f1;
   x1=x2;f1=f2;
   x2=x;
end
```

Στον κώδικα το a είναι το d0, το b το s και το c το f2, και κατά την κλίση της συνάρτησης το x_2 επιλέγεται να βρίσκεται ανάμεσα στα x_0 και x_1.

Οδηγίες

- Οι κλήσεις των μεθόδων θα γίνουν με τιμή της παραμέτρου ανοχής TOL ίση με 10^{-7}.
- Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί κατά τη διάρκεια του 4ου εργαστηρίου.
- Θα πρέπει να παραδοθεί εκτυπωμένη εργασία συρραμμένη (απλά) έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να την ξεφυλλίσει. Η εργασία θα πρέπει να έχει **εξώφυλλο** στο οποίο να αναφέρεται ο αύξων αριθμός της, το όνομα και ο αριθμός μητρώου του φοιτητή, τα στοιχεία της σχολής και του μαθήματος, η ημερομηνία παράδοσης και το τμήμα το οποίο παρακολουθεί εργαστήριο. Σε **παράρτημα** θα πρέπει να υπάρχουν εκτυπωμένοι οι κώδικες (τα προγράμματα, scripts και .m αρχεία). Στο κύριο μέρος της εργασίας θα πρέπει να αναπτύσσονται η διαδικασία, τα σχόλια, τα γραφήματα **και μόνο όσα από τα αποτελέσματα είναι απαραίτητα για τα συμπεράσματα**. Όλα αυτά θα πρέπει να έχουν τη συνοχή ενιαίου κειμένου. Εκτός από τις όποιες εκτυπώσεις θα πρέπει να παραδοθούν τα προγράμματα και τα αποτελέσματα τους **σε ηλεκτρονική μορφή (δισκέτα)**. Τα αποτελέσματα μπορείτε να τα αποθηκεύσετε με τη χρήση της diary.
- Αν δεν υπάρχει δυνατότητα παράδοσης της εργασίας σε έντυπη (εκτυπωμένη) μορφή, **γίνεται δεκτή και δισκέτα** που να περιέχει όλα όσα αναφέρονται παραπάνω. Δηλαδή, επιπλέον των προγραμμάτων και αποτελεσμάτων η δισκέτα θα πρέπει να περιέχει και **ένα αρχείο Word** που θα έχει ως περιεχόμενο **όλα όσα θα παραδίδατε σε εκτυπωμένη μορφή**.
- **Τόσο η πληρότητα, τα σχόλια το αν ακολουθήθηκαν οι οδηγίες αλλά και ο τρόπος της παρουσίασης των αποτελεσμάτων της εργασίας** που θα παραδοθεί θα ληφθούν υπ' όψιν κατά την αξιολόγηση.

ΤΕΜΦΕ 4^{ο} Εξάμηνο
Αριθμητική Ανάλυση Ι
3^{η} Εργαστηριακή Άσκηση

1. Μία άλλη μορφή μη γραμμικής προσέγγιση με ελάχιστα τετράγωνα, εκτός της εκθετικής είναι να επιλέξουμε μια συνάρτηση της μορφής:

$$y = b\frac{x}{a+x}$$

Την μορφή αυτή τη μετασχηματίζουμε στη μορφή:

$$\frac{1}{y} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{b}$$

Άρα και αυτήν τη μορφή με κατάλληλο μετασχηματισμό των δεδομένων μπορούμε να τη χειριστούμε με τη θεωρία της γραμμικής προσέγγισης με ελάχιστα τετράγωνα. Στον πίνακα που ακολουθεί εμφανίζονται πειραματικά δεδομένα:

X	7	9	15	25	40	75	100	150
Y	0.29	0.37	0.48	0.65	0.80	0.97	0.99	1.07

Να δημιουργήσετε αρχείο εντολών MATLAB (script) με το οποίο να συγκρίνετε, για τα πειραματικά δεδομένα, τις ακόλουθες τεχνικές προσέγγισης: α) το μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω και ελάχιστα τετράγωνα, β) εκθετική συνάρτηση $y(x) = bx^{a}$ και ελάχιστα τετράγωνα και γ) την εκθετική συνάρτηση $y(x) = be^{ax}$ και ελάχιστα τετράγωνα. Για κάθε περίπτωση να υπολογίζονται οι συντελεστές της μεθόδου προσέγγισης καθώς και το σφάλμα της κάθε μεθόδου $error = \sum_i \left(y_i - p(x_i)\right)^2$ και να εμφανίζεται σε ένα γράφημα το αποτέλεσμα της παρεμβολής καθώς και τα πειραματικά δεδομένα.

2. Είναι δυνατό να εφαρμόσουμε τη θεωρία της προσέγγισης συνόλου δεδομένων με ελαχιστοποίηση ελαχίστων τετραγώνων και για πιο γενικές συναρτήσεις. Μία επιλογή θα μπορούσε να ήταν μία συνάρτηση της μορφής:

$$a\ln(x) + b\cos(x) + c\ e^{x}$$

Εφαρμόζοντας τη θεωρία (δείτε 9.2,9.3 σελ. 413-420 βιβλίου) οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό σύστημα με τρεις αγνώστους τα a,b,c. Αφού πρώτα βρείτε τη μορφή που θα έχει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων (όπως ονομάζεται), καλείστε να δημιουργήσετε συνάρτηση function MATLAB με όνομα nopolyls το οποίο να λαμβάνει ως είσοδο τα δεδομένα (x,y) σε δύο διανύσματα, να ορίζει τους πίνακες του συστήματος, να λύνει το σύστημα και στη συνέχεια να επιστρέφει ένα διάνυσμα το οποίο να έχει ως στοιχεία τα a,b,c.
Να χρησιμοποιήσετε το nopolyls για την προσέγγιση των παρακάτω δεδομένων:

X	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
Y	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

Δηλαδή, να δημιουργηθεί αρχείο εντολών MATLAB (script) το οποίο αφού καλεί την nopolyls, να εμφανίζει τα a,b,c και σε ένα γράφημα τα σημεία (x,y) και την καμπύλη της συνάρτησης στο διάστημα $[0.1,3.5]$ με βήμα μεταβολής 0.1.

Οδηγίες

- Οι ημερομηνίες παράδοσης της εργασίας θα είναι μέσα στο πρώτο δεκαήμερο του Ιουλίου. Λόγω αντικειμενικών δυσκολιών θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του διδάσκοντα και θα αναρτηθούν στην πόρτα του γραφείου του γύρω τις 26 Ιουνίου.
- Θα πρέπει να παραδοθεί εκτυπωμένη εργασία συρραμμένη (απλά) έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να την ξεφυλλίσει. Η εργασία θα πρέπει να έχει **εξώφυλλο** στο οποίο να αναφέρεται ο αύξων αριθμός της, το όνομα και ο αριθμός μητρώου του φοιτητή, τα στοιχεία της σχολής και του μαθήματος, η ημερομηνία παράδοσης και το τμήμα το οποίο παρακολουθεί εργαστήριο. Σε **παράρτημα** θα πρέπει να υπάρχουν εκτυπωμένοι οι κώδικες (τα προγράμματα, scripts και .m αρχεία). Στο κύριο μέρος της εργασίας θα πρέπει να αναπτύσσονται η διαδικασία, τα σχόλια, τα γραφήματα **και μόνο όσα από τα αποτελέσματα είναι απαραίτητα για τα συμπεράσματα**. Όλα αυτά θα πρέπει να έχουν τη συνοχή ενιαίου κειμένου. Εκτός από τις όποιες εκτυπώσεις θα πρέπει να παραδοθούν τα προγράμματα και τα αποτελέσματα τους **σε ηλεκτρονική μορφή (δισκέτα)**. Τα αποτελέσματα μπορείτε να τα αποθηκεύσετε με τη χρήση της diary.
- Αν δεν υπάρχει δυνατότητα παράδοσης της εργασίας σε έντυπη (εκτυπωμένη) μορφή, **γίνεται δεκτή και δισκέτα** που να περιέχει όλα όσα αναφέρονται παραπάνω. Δηλαδή, επιπλέον των προγραμμάτων και αποτελεσμάτων η δισκέτα θα πρέπει να περιέχει και **ένα αρχείο Word** που θα έχει ως περιεχόμενο **όλα όσα θα παραδίδατε σε εκτυπωμένη μορφή**.
- **Τόσο η πληρότητα, τα σχόλια το αν ακολουθήθηκαν οι οδηγίες αλλά και ο τρόπος της παρουσίασης των αποτελεσμάτων της εργασίας** που θα παραδοθεί θα ληφθούν υπ' όψιν κατά την αξιολόγηση.