4/4/08

ΣΕΜΦΕ
ΑΡΙΘΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ Ι
ΕΑΡΙΝΟ

Εργαστήριο 1
Εισαγωγή στις αριθμητικές διαδικασίες. Σφάλματα.

Σε μία προσεγγιστική διαδικασία ορίζουμε ως **απόλυτο σφάλμα** την ποσότητα **err=| πραγματική τιμή – προσέγγιση |**. Η σημασία της τιμής του απόλυτου σφάλματος εξαρτάται από τη φύση της ποσότητας που προσεγγίζουμε. Για παράδειγμα αν η προς προσέγγιση ποσότητα είναι της τάξης του 10^{-2}, ένα σφάλμα 0.01 θεωρείται πολύ μεγάλο. Στην περίπτωση όμως που η προς προσέγγιση ποσότητα είναι της τάξης του 10^5, ένα σφάλμα 0.01 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο. Ορίζουμε ως **απόλυτο σχετικό σφάλμα** την ποσότητα **relerr=err / | πραγματική τιμή |**. Η ποσότητα αυτή κανονικοποιεί την ποσότητα του σφάλματος, μάλιστα πολλές φορές πολλαπλασιαζόμενο επί το εκατό μετράμε το επί της εκατό σχετικό σφάλμα. Αν το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι περίπου ίσο με 10^{-k} τότε η ποσότητα προσεγγίζεται με περίπου κ σημαντικά ψηφία. Ο μαθηματικά αυστηρός ορισμός αναφέρει ότι μία ποσότητα προσεγγίζεται σε κ σημαντικά ψηφία όταν το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι μικρότερο από 5×10^{-k}. Επίσης, ορίζεται ως **accuracy (ακρίβεια)** της προσεγγιστικής διαδικασίας ο αριθμός όλων των σημαντικών ψηφίων ενώ ως **precision (επακρίβεια)** ο αριθμός των σημαντικών δεκαδικών ψηφίων στα οποία ταυτίζονται η πραγματική ποσότητα και η προσέγγιση. Οι ποσότητες αυτές μπορούν να καθοριστούν και μαθηματικά από τους τύπους:

$$accuracy = -\log_{10}(err) \ \text{και}\ precision = -\log_{10}(relerr).$$

Αν και δεν είναι απαραίτητο, τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω τύπων μπορούν να στρογγυλοποιούνται στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό δεκαδικών ψηφιών.

Διαδικασία.

1. Δημιουργήστε το φάκελο εργασίας σας σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα. Κάντε ενεργό φάκελο του Matlab το φάκελό σας.
2. Ο ακόλουθος επαναληπτικός τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση της ποσότητας $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\ x_1 = a$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να προγραμματιστεί σε συνάρτηση (function) του Matlab:

```
function [x,iter] = mysqrt(a,tol)
% Square root of a scalar, a is assumed to be >= 0.
% TOL is a convergence tolerance (default EPS).
% returns also the number of iterations ITER for convergence.
if nargin < 2, tol = eps; end
x = a;
iter = 0;
xlist=x; (9) xdiff = inf;
while xdiff > tol
   iter = iter + 1;
   xold = x;
   x = (x + a/x)/2;
   xdiff = abs(x-xold)/abs(x); <- [illegible] σφάλματος
   if iter > 50
      error('Not converged after 50 iterations.')
   end
end <- (9) xlist=[xlist,x]
```

3. Διαβάστε την παραπάνω συνάρτηση και προσδιορίστε ποιες είναι οι μεταβλητές εισόδου και εξόδου της και πως υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία. 8
4. Τι δουλειά κάνει η μεταβλητή xdiff; Πώς μπορείτε να τη συσχετίσετε με τους ορισμούς που αναφέραμε παραπάνω;

5. Καλέστε τη βοήθεια (help ....) για να δείτε τι κάνει η εντολή error και η εναλλακτική break.
6. Πληκτρολογήστε τη συνάρτηση και αποθηκεύστε τη σε αρχείο με όνομα mysqrt.m στο φάκελο σας.
7. Εκτελέστε την εντολή *help mysqrt*
8. Καλέστε τη συνάρτηση για να υπολογίσετε το $\sqrt{65}$ για τιμές της παραμέτρου ανοχής 10^{-4} και eps.
9. Τροποποιείστε τη συνάρτηση έτσι ώστε να επιστρέφει σε ένα διάνυσμα κάθε τιμή προσέγγισης που υπολογίζεται. Ονομάστε αυτή τη νέα έκδοση mysqrt1.m.
10. Καλέστε τη νέα αυτή συνάρτηση για να υπολογίσετε το $\sqrt{13}$ για τιμές της παραμέτρου ανοχής 10^{-4} και 10^{-8} και εμφανίστε το διάνυσμα των προσεγγίσεων αλλά και τον αριθμό των επαναλήψεων.
11. Δημιουργήστε ένα αρχείο εντολών Matlab (script) με όνομα sqrscr1.m (και αποθηκεύστε το στο φάκελό σας) με τις ακόλουθες εντολές:

```
clear all;
format long e;
clf; ← καθαρίζει τα προηγούμενα γραφήματα
toler=input('Give tolerance :');
xtrue=................. ;
[x,xs,it]=mysqrt1(2,toler);
xerr=abs(xs-xtrue);
xabserr=abs(xs-xtrue)./abs(xtrue);
subplot(2,2,1);plot(xerr);
subplot(2,2,2);plot(xabserr);
acc=-log10(xerr);
pre=-log10(xabserr);
subplot(2,2,3);plot(acc);
subplot(2,2,4);plot(pre);
```

12. Υπολογίστε την πραγματική τιμή του $\sqrt{2}$ στο Mathematica υπολογίζοντάς την με 17 ψηφία ακρίβειας και χρησιμοποιήστε την στο script.
13. Σχολιάστε τι κάνει το script και τι ακριβώς εμφανίζει στο πολλαπλό γράφημα το script.
14. Γιατί χρησιμοποιείται ο τελεστής ./ στον υπολογισμό του xabserr;
15. Δημιουργήστε ένα αρχείο εντολών Matlab (script) με όνομα sqrscr2.m το οποίο να υπολογίζει τις accuracy και precision για τον υπολογισμό του $\sqrt{2}$ για τιμές της παραμέτρου ανοχής 10^{-3} και eps και να τις εμφανίζει σε τέσσερα διαφορετικά γραφήματα του ίδιου subplot με διαφορετικά σημάδια (π.χ. x,+,*,.).

Για να δημιουργήσω plot με σημαδάκια, γράφω
plot(...,'*')

08

Η λύση της άσκησης 15


```
clear all;
format long e;
clf;
xtrue=1.4142135623730950;
[x1,xs1,it1]=mysqrt1(2,1e-3);
[x2,xs2,it2]=mysqrt1(2);
xerr1=abs(xs1-xtrue);
xabserr1=abs(xs1-xtrue)./abs(xtrue);
acc1=-log10(xerr1);
pre1=-log10(xabserr1);
xerr2=abs(xs2-xtrue);
xabserr2=abs(xs2-xtrue)./abs(xtrue);
acc2=-log10(xerr2);
pre2=-log10(xabserr2);
subplot(2,2,1);plot(acc1,'*');
subplot(2,2,2);plot(pre1,'x');
subplot(2,2,3);plot(acc2,'+');
subplot(2,2,4);plot(pre2,'.');
```