

Εργαστήριο 2

Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων και συστημάτων.

Το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι η εύρεση ριζών της $f(x) = 0$. Η επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson για τη λύση του παραπάνω προβλήματος, ορίζεται από τον επαναληπτικό τύπο: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Η μέθοδος αυτή υλοποιείται στο Matlab από την ακόλουθη συνάρτηση:

```
function [x,xlist,iter] = nr(f,df,x0,tol,maxit)
% Root of f(x)=0 by Newton-Raphson's method.
% method terminates when relative change > tol
% or maximum number exceeds of iterations
if nargin < 3, error('Insufficient input \n'); end;
if nargin < 4,tol = eps; end;
if nargin < 5, maxit = 50; end;
x = x0; iter = 0; xdiff = inf; xlist=x;
while xdiff >= tol
    iter = iter + 1; xold = x;
    x = x - feval(f,x)/feval(df,x);
    xdiff = abs(x-xold)/abs(x);
    xlist=[xlist;x];
    if iter >= maxit, error('Not converged after maxit iterations.');
```

Η συνάρτηση αυτή καλεί δύο άλλες συναρτήσεις μία για το υπολογισμό της συνάρτησης f και μία για τον υπολογισμό της παραγώγου της.

- Χρησιμοποιώντας γνωστά θεωρήματα από την ανάλυση δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 4x^2 - 3 = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.
- Χρησιμοποιώντας την Newton-Raphson λύστε το πρόβλημα έχοντας αρχική τιμή το $x_0 = 0.5$ και παράμετρο TOL 10^{-3} και 10^{-6} . Εμφανίστε την ακολουθία των τιμών της επαναληπτικής διαδικασίας, την τιμή της f σε καθένα από αυτά τα σημεία και το απόλυτο σφάλμα. Σχολιάστε τα αποτελέσματα. Ακολουθώντας σας δίνονται οι συναρτήσεις $f.m$ και $df.m$ που χρειάζονται για τη λύση και η κλίση της $nr.m$ (προσέξτε τον τελεστή \wedge στην $f.m$).

function y=f(x);
y=4*x.^2-3;

function y=fd(x);
y=8*x;

>> [xs1,xslist1]=nr('f','fd',0.5,1e-3)

Μια μέθοδος λέμε ότι έχει τάξη σύγκλισης q αν ισχύει $\lim \frac{e_{n+1}}{e_n^q} = K$, όπου $e_n = x_n - r$ το σφάλμα.

3. Για το πρόβλημα του ερωτήματος 2 πιστοποιήστε ότι για την Newton-Raphson η σύγκλιση είναι τετραγωνική ($q=2$), αν $f'(r) \neq 0$.

Για να αποφύγουμε τον υπολογισμό της παραγώγου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διακριτή μέθοδο Newton-Raphson που ορίζεται από τον επαναληπτικό τύπο: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\delta_h f(x_n)}$, όπου η παράγωγος της f προσεγγίζεται από τη διακριτή παράγωγο της σε ένα σημείο x , η οποία ορίζεται ως:

$\delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, για δεδομένο μικρό $h > 0$ (της τάξης του 10^{-3}). Η προσέγγιση αυτή της παραγώγου έχει σφάλμα τάξης $O(h)$ (δηλαδή είναι μικρότερο από Kh).

4. Μετατρέψτε σε.m ώστε να υλοποιεί τη διακριτή μέθοδο Newton-Raphson και αποθηκεύστε τη με όνομα `dis.m`. Κάντε τα τριζύρια του ερωτήματος 2 με αυτή τη μέθοδο και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Μια άλλη μέθοδος που δεν απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου είναι η `secant` (βιβλίο σελίδα 261) με

επαναληπτικό τύπο $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$, που υλοποιείται με την ακόλουθη συνάρτηση.

```
function [x,xlist,iter] = secant(f,x0,x1,tol,maxit)
if nargin < 3, error('Insufficient input \'n\'); end;
if nargin < 4, tol = eps; end;
if nargin < 5, maxit = 50; end;
f0 = feval(f,x0); f1 = feval(f,x1);
iter = 0; xdiff = inf; xlist=[x0;x1]; x=x1;
while xdiff >= tol
    xold=x;
    x = x - f1*(x1-x0)/(f1-f0);
    xdiff = abs(x-xold)/abs(x);
    xlist=[xlist;x];    iter = iter + 1;
    if iter >= maxit, error('Not converged after maxit iterations.');
```

```
end
x0=x1; f0=f1; x1=x; f1 = feval(f,x);
end
```

5. Χρησιμοποιήστε τη `secant` και αρχικές τιμές τις 8 και 7, για να λύσετε το πρόβλημα $f(x) = x^3 - \sinh x + 4x^2 + 6x + 9 = 0$ (παρ. 6.8 σελ. 260).

Αν μία ρίζα έχει πολλαπλότητα m τότε η Newton-Raphson χάνει τη τετραγωνική σύγκλιση της. Για να διατηρήσουμε την τετραγωνική σύγκλιση τότε χρησιμοποιούμε την μέθοδο Schroder (βιβλίο σελίδα 264) με

επαναληπτικό τύπο $x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

6. Υλοποιήστε τη μέθοδο Schroder σε μία συνάρτηση με όνομα αρχείου `seroder.m`. Πιστοποιήστε τα όσα αναφέραμε παραπάνω για τη λύση της $x^4 - 13x^3 + 33x^2 - 31x + 10 = 0$ ξεκινώντας από το 0 για την προσέγγιση της τριπλής ρίζας 1 με $TOL=10^{-4}$. Για να βγάλετε τα συμπεράσματα σας λύστε το πρόβλημα αρχικά με τη Newton-Raphson και έπειτα με τη Schroder και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.