Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής

Κβαντομηχανική ΙΙ *Α. Καρανίκας και Π. Σφήκας*

Σημειώσεις V: Εύρεση παραγόντων Clebsch-Gordan

Όπως έχομε δεί στην τάξη, όταν έχομε δύο στροφορμές, $\vec{J}_1$ και $\vec{J}_2$, π.χ. επειδή έχομε δύο σωματίδια, μπορούμε να προσδιορίσομε συγχρόνως το μέγεθος της κάθε ορμής, j_1 και j_2, όπως επίσης και τις δύο προβολές ως προς ένα άξονα, έστω τον *z*, δηλαδή τους κβαντικούς αριθμούς m_1 και m_2. Υπενθυμίζομε ότι αυτό σημαίνει ότι το ένα σωμάτιο έχει ολική στροφορμή και προβολή

$$\vec{J}_1^{\,2}\left|j_1\,m_1\right\rangle = j_1\left(j_1+1\right)\hbar^2\left|j_1\,m_1\right\rangle \qquad J_{1,z}\left|j_1\,m_1\right\rangle = m_1\hbar\left|j_1\,m_1\right\rangle$$

και αντίστοιχα, το δεύτερο σωμάτιο έχει

$$\vec{J}_2^{\,2}\left|j_2\,m_2\right\rangle = j_2\left(j_2+1\right)\hbar^2\left|j_2\,m_2\right\rangle \qquad J_{2,z}\left|j_2\,m_2\right\rangle = m_2\hbar\left|j_2\,m_2\right\rangle .$$

Μπορούμε, αντί των m_1 και m_2 να μετρήσομε την συνολική στροφορμή των δύο σωματίων, όπως επίσης και την προβολή της, *m*. Μαθηματικά, αν

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

και η συνολική στροφορμή «είναι» *j* και η προβολή της «είναι» *m*, δηλ. αν

$$\vec{J}^2\left|j\,m\right\rangle = j\left(j+1\right)\hbar^2\left|j\,m\right\rangle \qquad J_z\left|j\,m\right\rangle = m\hbar\left|j\,m\right\rangle$$

Τότε τα *j* και *m*, πληρούν τις σχέσεις:

(α) το *j* παίρνει όλες τις τιμές από $\left|j_1 - j_2\right|$ έως $j_1 + j_2$.

(β) το *m*, όπως κάθε προβολή της στροφορμής, παίρνει τιμές από –*j* έως +*j*.

(γ) το *m* πάντα ισούται με το άθροισμα των δύο επι μέρους προβολών, δηλ. $m = m_1 + m_2$.

Οι παράγοντες Clebsch-Gordan εκφράζουν τις καταστάσεις ολικής στροφορμής ως συνδυασμό των καταστάσεων με γνωστές τις δύο προβολές, δηλ. μας επιτρέπουν να εκφράσομε μία βάση του χώρου σε μία άλλη. Στην μία βάση, την $\left\{\left|m_1, m_2; j_1, j_2\right\rangle\right\}$, γνωρίζομε τα j_1, j_2, και τα m_1, m_2. Στην άλλη βάση, $\left\{\left|j, m; j_1, j_2\right\rangle\right\}$, γνωρίζομε j_1, j_2, και τα j, m. Συμβολικά, γράφομε

$$\left|j,m\right\rangle = \sum_{m_1,m_2} C^{jm}_{m_1m_2}\left|m_1,m_2\right\rangle \tag{5.1}$$

Οι παράγοντες $C^{jm}_{m_1m_2}$ λέγονται συντελεστές **Clebsch-Gordan** και εκφράζουν το πλάτος πιθανότητας να μετρήσομε προβολές m_1, m_2 σε μία κατάσταση πού έχει ολική στροφορμή j και προβολή m. Στη βιβλιογραφία, οι παράγοντες αυτοί συμβολίζονται με πολλούς ισοδύναμους τρόπους. Αναφέρομε μερικούς από αυτούς, με προφανή έννοια:

$$C^{jm}_{m_1m_2} \quad C_{m_1m_2}\left(j,m\right) \quad C\left(j,m;m_1,m_2\right) \text{ ακόμα και } C\left(m_1,m_2\right) \text{ και } C_{m_1m_2}$$

Όπου οι δύο τελευταίοι συμβολισμοί χρησιμοποιούνται όταν οι τιμές των j και m είναι «προφανείς».

Από την (5.1) βρίσκομε εύκολα ότι

$$C(j,m;m_1,m_2) = \left\langle m_1, m_2 \mid j, m\right\rangle \tag{5.2}$$

1. Προσδιορισμός των συντελεστών Clebsch-Gordan

Αφετηρία μας είναι δύο παρατηρήσεις (α) και (γ) στην προηγούμενη παράγραφο, δηλ:

$$|j_2 - j_1| \leq j \leq j_2 + j_1 \text{ και } m = m_1 + m_2$$

πράγμα που σημαίνει ότι $C(j,m;m_1,m_2) = \langle m_1, m_2 | j, m \rangle = 0$ αν $m \neq m_1 + m_2$

Ας δουλέψομε ως παράδειγμα την πρόσθεση των spin δύο ηλεκτρονίων, δηλ δύο σωματιδίων με $s_1 = s_2 = 1/2$. Προφανώς, για το συνολικό spin, *s*, θα έχομε $0 \leq s \leq 1$ και επομένως το s μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές: 0 ή 1.

- Για $s = 0$, υπάρχει μόνο μία δυνατή προβολή, η *m*=0.
- Για $s = 1$, υπάρχουν τρείς δυνατές προβολές, οι: $m = 0, \pm 1$.

Ως δεύτερο παράδειγμα, παίρνομε την πρόσθεση δύο spin-1, δηλ. $s_1 = s_2 = 1$. Εδώ το συνολικό spin, *s*, παίρνει τιμές στο $0 \leq s \leq 2$ και άρα οι πιθανές καταστάσεις είναι:

$$(s = 0 \ , m = 0) \ , \ (s = 1 \ , m = \pm 1, 0) \ , \ (s = 2 \ , m = \pm 2, \pm 1, 0) \tag{5.3}$$

Η γενική τεχνική που ακολουθούμε είναι η εξής :

- Για δεδομένο s διαλέγουμε το μεγαλύτερο δυνατό m $(= s)$ και βρίσκουμε το ανάπτυγμα
$$|s, m = s\rangle = \sum_{m_1, m_2} C(s, m = s; m_1, m_2) |m_1, m_2\rangle \tag{5.4}$$
- Με δεδομένο το αποτέλεσμα (5.4), χρησιμοποιηούμε τον τελεστή σκάλας $\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}$ για να εξαντλήσουμε όλες τις τιμές του m έως την μικρότερη δυνατή τιμή δηλ. έως $m = -s$. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την σχέση:
$$\hat{S}_- |s, m = s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m(m-1)} |s, m = s - 1\rangle \tag{5.5}$$
- Εφαρμόζοντας την (5.5) στην δεξιά πλευρά της (5.4), στις καταστάσεις $|m_1, m_2\rangle$, παίρνομε:
$$(\hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}) |m_1, m_2\rangle = \hbar \sqrt{s_1(s_1+1) - m_1(m_1-1)} |m_1 - 1, m_2\rangle + \hbar \sqrt{s_2(s_2+1) - m_2(m_2-1)} |m_1, m_2 - 1\rangle$$
Εφ'όσον ξέρομε τους συντελεστές του αναπτύγματος στην (5.4) μπορούμε, με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων, αμέσως να βρούμε τους συντελεστές του αναπτύγματος $|s, m = s - 1\rangle$.

Η διαδικασία προχωράει πολύ εύκολα αν το s για το οποίο συζητάμε είναι το μέγιστο δυνατό δηλ. αν $s = s_{\max} = s_1 + s_2 = m_{\max} = m_{1\max} + m_{2\max}$. Σ'αυτήν την περίπτωση η (5.4) έχει μόνο έναν όρο:

$$|s = s_1 + s_2, m = s\rangle = C(s, m, m_1 = s_1; m_2 = s_2) |m_1 = s_1, m_2 = s_2\rangle \tag{5.6}$$

Ο συντελεστής εδώ μπορεί να υπολογιστεί από τη συνθήκη κανονικοποίησης (νορμαλισμού) $|C|^2 = 1$ η οποία , κατά σύμβαση, μας οδηγεί στο συμπέρασμα $C = 1$

Ας δούμε δύο παραδείγματα:

1) Το πρώτο παράδειγμα: $s_1 = s_2 = 1/2$ οπότε $s = 0$ ή 1.

Θα ξεκινήσουμε από την περίπτωση $s = s_{\max} = 1$ όπου $m = \pm 1, 0$ και $m_{\max} = 1$. Είναι προφανές ότι η τιμή $m = m_1 + m_2 = 1$ μπορεί να επιτευχθεί μόνο με έναν τρόπο: $m_1 = 1/2$ και $m_2 = 1/2$. Επομένως ισχύει (δηλ. το αντίστοιχο της (5.6) είναι)

$$|s = 1, m = 1\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \tag{5.7}$$

Δρώντας τώρα με τον τελεστή κατάβασης $\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} + \hat{S}_{2-}$ παίρνομε:

$$\hat{S}_-\left|s=1,m=1\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left|s=1,m=0\right\rangle$$

$$(\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-})\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \hbar\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

και έτσι βρίσκουμε:

$$\left|s=1,m=0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) \qquad (5.8)$$

Ακόμα ένας βηματισμός (δηλ. εφαρμογή του τελεστή κατάβασης) θα μας δώσει :

$$\left|s=1,m=-1\right\rangle = \left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \qquad (5.9)$$

Είναι προφανές ότι το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να παραχθεί απ’ευθείας όπως το (5.7): ο μόνος τρόπος να έχομε $m=m_1+m_2=-1$ είναι $m_1=-1/2$ και $m_2=-1/2$. Αυτό είναι γενικό συμπέρασμα: αν είμαστε σε κατάσταση με $s=s_1+s_2$ ο μόνος συνδυασμός που δίνει $m=m_1+m_2=-s_1-s_2$ είναι $m_1=-s_1$ και $m_2=-s_2$. Θα μπορούσαμε μάλιστα να χρησιμοποιήσουμε αυτό το συνδυασμό ως αφετηρία και ακολούθως να χρησιμοποιήσομε τον τελεστή ανάβασης $\hat{S}_+=\hat{S}_{1+}+\hat{S}_{2+}$ για να εξαντλήσουμε όλες τις τιμές του m. Το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο.

2) Ως δεύτερο παράδειγμα ας πάρουμε την περίπτωση $s_1=s_2=1$ που οδηγεί στις δυνατότητες (5.3). Αφετηρία μας είναι και πάλι η κατάσταση με την μέγιστη προβολή της ολικής στροφορμής, που εδώ είναι η $\left|s=2,m=2\right\rangle$. Η κατάσταση αυτή μπορεί να επιτευχθεί μόνο με έναν τρόπο:

$$\left|s=2,m=2\right\rangle = \left|m_1=1,m_2=1\right\rangle \qquad (5.10)$$

Δρώντας με τον τελεστή κατάβασης, παίρνομε:

$$\hat{S}_-\left|s=2,m=2\right\rangle = 2\hbar\left|s=2,m=1\right\rangle$$

$$(\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-})\left|m_1=1,m_2=1\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left(\left|m_1=0,m_2=1\right\rangle + \left|m_1=1,m_2=0\right\rangle\right)$$

και έτσι είναι άμεση η διαπίστωση ότι

$$\left|s=2,m=1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|m_1=0,m_2=1\right\rangle + \left|m_1=1,m_2=0\right\rangle\right) \qquad (5.11)$$

Το επόμενο βήμα θα είναι ακόμη μία εφαρμογή του τελεστή κατάβασης:

$$\hat{S}_-\left|s=2,m=1\right\rangle = \hbar\sqrt{6}\left|s=2,m=0\right\rangle$$

$$(\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-})\left|m_1=0,m_2=1\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left(\left|m_1=-1,m_2=1\right\rangle + \left|m_1=0,m_2=0\right\rangle\right)$$

$$(\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-})\left|m_1=1,m_2=0\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left(\left|m_1=0,m_2=0\right\rangle + \left|m_1=1,m_2=-1\right\rangle\right)$$

και επομένως, μαζεύοντας όλους τους όρους στην (5.11), παίρνομε

$$\left|s=2,m=0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\left|m_1=1,m_2=-1\right\rangle + 2\left|m_1=0,m_2=0\right\rangle + \left|m_1=-1,m_2=1\right\rangle\right) \qquad (5.12)$$

Τα επόμενα βήματα γίνονται εύκολα. Τα αποτελέσματα είναι:

$$\left|s=2,m=-1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|m_1=0,m_2=-1\right\rangle + \left|m_1=-1,m_2=0\right\rangle\right) \qquad (5.13)$$

και

$$\left|s=2,m=-2\right\rangle = \left|m_1=-1,m_2=-1\right\rangle \qquad (5.14)$$

Έχουμε λοιπόν βρεί τις πέντε καταστάσεις με συνολική στροφορμή s=2. Θα υπολογίσομε τώρα τις καταστάσεις με s=1 (που είναι τρεις: $m=\pm 1,0$). Είναι προφανές ότι εάν $s<s_{\max}=s_1+s_2$, η αφετηρία της όλης διαδικασίας, δηλ. το ανάπτυγμα στην (5.4) δεν έχει μόνον ένα όρο και επομένως

χρειάζεται κάτι περισσότερο για να προσδιορίσουμε ττον πρώτο όρο της προηγούμενης διαδικασίας. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{S}}^2 &= (\hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2)^2 = \hat{\vec{S}}_1^2 + \hat{\vec{S}}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + 2(\hat{S}_{1x}\hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y}\hat{S}_{2y}) \\ &= \hat{\vec{S}}_1^2 + \hat{\vec{S}}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Δρώντας με τον τελεστή αυτό στις δύο πλευρές της σχέσης (5.4) παίρνομε

$$\hat{\vec{S}}^2 \left| s, m \right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \left| s, m \right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \sum_{m_1, m_2} C(s, m = s; m_1, m_2) \left| m_1, m_2 \right\rangle \tag{5.16}$$

Από την άλλη μεριά η δράση του τελεστή στα ανύσματα $\left| m_1, m_2 \right\rangle$ θα τα τροποποιήσει :

$$\begin{aligned} &(\hat{\vec{S}}_1^2 + \hat{\vec{S}}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}) \left| m_1, m_2 \right\rangle = \\ &= \hbar^2 [\alpha(1,2) \left| m_1, m_2 \right\rangle + \beta(1,2) \left| m_1 + 1, m_2 - 1 \right\rangle + \beta(2,1) \left| m_1 - 1, m_2 + 1 \right\rangle] \end{aligned} \tag{5.17}$$

όπου γράψαμε

$$\begin{aligned} \alpha(1,2) &= s_1(s_1+1) + s_2(s_2+1) + 2m_1 m_2 \\ \beta(1,2) &= \sqrt{s_1(s_1+1) - m_1(m_1+1)}\sqrt{s_2(s_2+1) - m_2(m_2-1)} \\ \beta(2,1) &= \sqrt{s_2(s_2+1) - m_2(m_2+1)}\sqrt{s_1(s_1+1) - m_1(m_1-1)} \end{aligned}$$

Αν επομένως δράσουμε με τον τελεστή (5.15) στη σχέση (5.4) και χρησιμοποιήσουμε τις (5.16) και (5.17) θα πάρουμε :

$$\begin{aligned} &s(s+1) \sum_{m_1, m_2} C(s, m = s, m_1, m_2) \left| m_1, m_2 \right\rangle = \\ &= \sum_{m_1, m_2} C(s, m = s, m_1, m_2) \left[\alpha(1,2) \left| m_1, m_2 \right\rangle + \beta(1,2) \left| m_1 + 1, m_2 - 1 \right\rangle + \beta(2,1) \left| m_1 - 1, m_2 + 1 \right\rangle \right] \end{aligned} \tag{5.18}$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την (5.18) αν κάνουμε τις μετονομασίες $m_1 \to m_1' = m_1 \mp 1$ και $m_2 \to m_2' = m_2 \pm 1$ στους δύο τελευταίους όρους. Το μόνο που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι και με την αλλαγή αυτή πρέπει να παραμείνουμε στις επιτρεπόμενες περιοχές $|m_1| \le s_1$, $|m_2| \le s_2$. Για αυτό το σωστό είναι να γράψουμε

$$m_1 \to m_1' = m_1 \mp 1 \ \operatorname{mod}(s_1)\ ,\ m_2 \to m_2' = m_2 \pm 1 \ \operatorname{mod}(s_2) \tag{5.19}$$

συμβολισμός που σημαίνει ότι αν με την αλλαγή βγούμε έξω από τα επιτρεπόμενα όρια θα προσθέσουμε (ή θα αφαιρέσουμε) το s_1 ή το s_2 για να επανέλθουμε στα επιτρεπτά όρια. Με τις εξηγήσεις αυτές μπορούμε να γράψουμε

$$s(s+1) \sum_{m_1, m_2} C(s, m = s; m_1, m_2) \left| m_1, m_2 \right\rangle = \sum_{m_1, m_2} \tilde{C}(s, m = s; m_1, m_2) \left| m_1, m_2 \right\rangle \tag{5.20}$$

Είναι επομένως απλώς θέμα νορμαλισμού το να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα

$$\left| s = 0, m = 0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\left| m_1 = 1, m_2 = -1 \right\rangle - \left| m_1 = 0, m_2 = 0 \right\rangle + \left| m_1 = -1, m_2 = 0 \right\rangle \right) \tag{5.21}$$

Επιστρέφομε λοιπόν στο παράδειγμα με την περίπτωση $(s = 1\ ,\ m = \pm 1, 0)$. Θα ξεκινήσουμε με την κατάσταση $\left| s = 1, m = 1 \right\rangle$ η οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί με δύο τρόπους

$$\left| s = 1, m = 1 \right\rangle = \alpha \left| m_1 = 1, m_2 = 0 \right\rangle + \beta \left| m_1 = 0, m_2 = 1 \right\rangle \tag{5.22}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.15) παίρνομε

$$\begin{aligned} &\hat{S}^2 \left| s = 1, m = 1 \right\rangle = 2\hbar^2 \left| s = 1, m = 1 \right\rangle \\ &\hat{S}^2 \left| m_1 = 1, m_2 = 0 \right\rangle = 2\hbar^2 \left(2 \left| m_1 = 1, m_2 = 0 \right\rangle + \left| m_1 = 0, m_2 = 1 \right\rangle \right) \\ &\hat{S}^2 \left| m_1 = 0, m_2 = 1 \right\rangle = 2\hbar^2 \left(2 \left| m_1 = 0, m_2 = 1 \right\rangle + \left| m_1 = 1, m_2 = 0 \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Επομένως με τη δράση του $\hat{S}^2$ στην (5.22) θα πάρουμε

$$\left|s=1,m=1\right\rangle=(\alpha+2\beta)\left|m_1=0,m_2=1\right\rangle+(2\alpha+\beta)\left|m_1=1,m_2=0\right\rangle \tag{5.23}$$

Από τις (5.22) και (5.23) προκύπτει αμέσως ότι $2\alpha+\beta=\alpha$ και $\alpha+2\beta=\beta$ που είναι ακριβώς το σύστημα (5.20) για τους συνδυασμούς που συζητάμε. Κανονικοποιώντας το αποτέλεσμα βρίσκουμε

$$\left|s=1,m=1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|m_1=1,m_2=0\right\rangle-\left|m_1=0,m_2=1\right\rangle\right) \tag{5.24}$$

Για να βρούμε τις άλλες καταστάσεις, που έχουν απλώς διαφορετικό m, θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $\hat{S}_-=\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-}$ και αν λάβουμε υπόψη ότι :

$$\hat{S}_-\left|s=1,m=1\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left|s=1,m=0\right\rangle$$
$$\hat{S}_-\left|m_1=1,m_2=0\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left(\left|m_1=0,m_2=0\right\rangle+\left|m_1=1,m_2=-1\right\rangle\right)$$
$$\hat{S}_-\left|m_1=0,m_2=1\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\left(\left|m_1=0,m_2=0\right\rangle+\left|m_1=-1,m_2=1\right\rangle\right)$$

θα προκύψει αμέσως ότι

$$\left|s=1,m=0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|m_1=1,m_2=-1\right\rangle-\left|m_1=-1,m_2=1\right\rangle\right) \tag{5.25}$$

Ακόμη ένας βηματισμός θα μας δώσει και την τελευταία κατάσταση

$$\left|s=1,m=-1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|m_1=0,m_2=-1\right\rangle-\left|m_1=-1,m_2=0\right\rangle\right) \tag{5.26}$$

2. Περίληψη και ανάλυση

Στο πρώτο από τα παραδείγματα βρήκαμε τη βάση στην οποία μπορούμε να περιγράψουμε ένα σύστημα δύο σωματιδίων καθένα από τα οποία έχει spin $1/2$. Η βάση αυτή αποτελείται από μια κατάσταση με spin 0 (η συντομογράφηση είναι προφανής):

$$\left|0,0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle-\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\right) \tag{5.27}$$

και από μια τριάδα καταστάσεων με spin 1:

$$\left|1,1\right\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\uparrow\uparrow$$
$$\left|1,0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\left|-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow\right) \tag{5.28}$$
$$\left|1,-1\right\rangle=\left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\downarrow\downarrow$$

Για ευκολία, έχομε εισαγάγει τον συμβολισμό με ένα κάθετο βέλος, με φορά πρός τα άνω (κάτω) $\uparrow$ ($\downarrow$) όταν m>0 (m<0). Και όταν m=0, όπως στο επόμενο παράδειγμα, γράφομε μία τελεία: ($\circ$).

Από τις καταστάσεις αυτές η (5.27) αναφέρεται ως **"singlet"** ενώ τα ανύσματα (5.28) απαρτίζουν μια **"triplet"**. Η αφετηρία της ονομασίας αυτής βρίσκεται στη διαφορετική απόκριση των καταστάσεων αυτών σε στροφές του φυσικού συστήματος . Όπως είναι προφανές η **singlet κατάσταση (5.27) δεν μεταβάλλεται**. Αντίθετα **τα ανύσματα της triplet (5.28) αναμειγνύονται**: Η δράση του τελεστή

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}\right)$$

πάνω σε οποιοδήποτε από αυτά θα οδηγήσει σε μια κατάσταση η οποία είναι γραμμικός συνδυασμός των ανυσμάτων της triplet.

Διατυπωμένο αλλιώς: στη βάση αυτή μπορούμε να περιγράψουμε μια οντότητα $|\psi\rangle = |0,0\rangle$ με spin 0 η οποία έχει συντεθεί από δύο σωμάτια με spin $1/2$ αλλά και μια οντότητα $|\psi\rangle = a|1,1\rangle + b|1,0\rangle + c|1,-1\rangle$ με spin 1 η οποία επίσης συντίθεται από δύο σωμάτια με spin $1/2$. Τέλος, σημειώνομε ότι η singlet είναι αντισυμμετρική ως προς την εναλλαγή των δύο σωματιδίων, ενώ η triplet είναι συμμετρική.

Στο δεύτερο από τα παραδείγματα έχουμε μια **singlet** κατάσταση με spin 0:

$$|s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1,-1\rangle - |0,0\rangle + |-1,1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\uparrow\downarrow - \circ\circ + \downarrow\uparrow\right) \tag{5.29}$$

μια **triplet** με spin 1:

$$\begin{aligned}
|s=1, m=1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - |0,1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\circ - \circ\uparrow\right) \\
|s=1, m=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,-1\rangle - |-1,1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right) \\
|s=1, m=-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,-1\rangle - |-1,0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\circ\downarrow - \downarrow\circ\right)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

και μια **pentuplet** με spin 2:

$$\begin{aligned}
|s=2, m=2\rangle &= |1,1\rangle = \uparrow\uparrow \\
|s=2, m=1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\circ + \circ\uparrow\right) \\
|s=2, m=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1,-1\rangle + 2|0,0\rangle + |-1,1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\uparrow\downarrow + 2\circ\circ + \downarrow\uparrow\right) \\
|s=2, m=-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,-1\rangle + |-1,0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\circ\downarrow + \downarrow\circ\right) \\
|s=2, m=-2\rangle &= |-1,-1\rangle = \downarrow\downarrow
\end{aligned} \tag{5.31}$$