ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική ΙΙ

Τελική εξέταση Φεβρουαρίου, 1/02/2010.
Διδάσκων Κ. Φαράκος

Θέμα Ι. Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου μάζας m στο επίπεδο (x, y) δίνεται από την σχέση $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + bxy$

Όπου b είναι μία σταθερά με κατάλληλες μονάδες.
(α) Να υπολογιστούν οι ενέργειες και οι κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου για $b=0$. Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις του μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή θεωρούνται γνωστές.
(β) Εάν $b \neq 0$ και $b << m\omega^2$, να υπολογιστούν σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών οι ενέργειες της χαμηλότερης εκφυλισμένης στάθμης του πρώτου ερωτήματος και οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.

Θέμα ΙΙ. Ηλεκτρόνιο, ακίνητο, ευρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την σχέση $\bar{B}(t) = B_0 \sin(\omega_0 t)\,\hat{z}$. Για $t = 0$ το ηλεκτρόνιο ευρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του τελεστή S_x με ιδιοτιμή $+\hbar/2$. (α) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου την τυχαία χρονική στιγμή t. (β) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του χρόνου την μέση τιμή για το *spin* στη κατεύθυνση x, y και z. Τι παρατηρείται για το διάνυσμα της μέσης τιμής του spin; $<\bar{S}> = \hat{i} <S_x> + \hat{j} <S_y> + \hat{k} <S_z>$.

Θέμα ΙΙΙ. Σωμάτιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$ όπου, $V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ V_0 & a < r \end{cases}$.

(α) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.
(β) Προσδιορίστε το V_0 έτσι ώστε το σύστημα να έχει για στροφορμή μηδέν μόνο τρεις δέσμιες καταστάσεις.

Θέμα IV. (α) Αποδείξτε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές της στροφορμής.
(β) Αν $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ να δείξετε ότι $[L^2, L_k] = 0$ όπου $k = x, y, z$.
(γ) Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I} + gL_z$, I και g θετικές σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Να βρείτε το ενεργειακό του φάσμα. Εάν $g = \hbar/2I$ βρείτε τον εκφυλισμό της θεμελιώδους κατάστασης.

Δίνονται: $s_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right), \qquad \bar{\mu}_s = -g\frac{e}{2m}\bar{S}$$

$$x\psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\psi_{n+1})$$