

ΟΜΑΔΑ Α

ΣΕΜΦΕ Μαθηματική Ανάλυση ΗΙ

Σεπτέμβριος 2006

Όνοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1ο Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ και το χωρίο $V = \{(x, y, z) : 5 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$.

A) Να σχεδιασθεί το χωρίο V και να αποδειχθεί ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα στη συνολική επιφάνεια του χωρίου με θετική όψη την εξωτερική είναι $\iint_V \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 8\pi$.

B) Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου V μόνο με γούστα του ερωτήματος (A).

→ Γ) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int F \cdot dr$ όπου $r(t)$ μια παραμετρική παράσταση του συνόρου της επιφάνειας $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 5$ με:

1) με χρήση του τύπου: $\int F \cdot dr = \int_0^b F(r(t)) \dot{r}(t) dt$. 2) με κατάλληλο επιφανειακό ολοκλήρωμα.

ΘΕΜΑ 2ο

→ A) Να δειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = (zy, xz, xy)$ προέρχεται από δυναμικό και να βρεθεί αυτό και να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του \mathbf{F} στη καμπύλη $r(t) = (\sin(t - \frac{\pi}{2})e^t, e^{3t} \frac{t}{\pi} \cos t, \cos^3 t)$, $t \in [0, \pi]$.

B) Δίνεται ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ σε ένα χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ με σύνορο που δίνεται από την $\partial D : r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ για τα οποία ισχύει το θεώρημα Green.

→ 1. Να αποδείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο $n(t) = \frac{1}{\|r'(t)\|} (y'(t), -x'(t))$ είναι κάθετο στη καμπύλη.

2. Αν $f(x, y)$ διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση στο \mathbb{R}^2 για την οποία $f(r(t)) = \mathbf{F}(r(t)) \cdot n(t)$, να δείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους της f στην $r(t)$ έχει την ίδια τιμή με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους του διανυσματικού πεδίου $G(x, y) = (-Q(x, y), P(x, y))$ στην ίδια καμπύλη.

→ 3. Να δείξετε ότι ο τύπος του Green γράφεται ισοδύναμα: $\oint F \cdot nds = \iint_D d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} dxdy$

ΘΕΜΑ 3ο: A) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \iint_D ye^{x-y} dx dy$, όπου D το χωρίο που ορίζουν οι ευθείες $y = 0, y = 1, x - y = 0, x - y = 1$.

→ B) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, όπου Ω το στερεό μεταξύ των σφαιρών:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ και } S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

ΘΕΜΑ 4ο: A) Να γράψετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα α' είδους $I = \iint_S (x^2 + y + z) dS$, όπου

$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, ως επιφανειακό ολοκλήρωμα β' είδους για κατάλληλο διανυσματικό πεδίο F .

B) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Gauss να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα του ερωτήματος A.