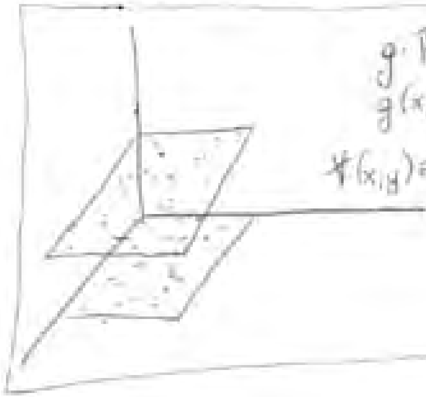
ΤΕΤΑΡΤΗ 7/11/2007 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ III (1)

• Πρόβλημα:

$f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$

$f \geq 0 \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} f(x,y) \geq 0, \ \forall x,y \in D$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

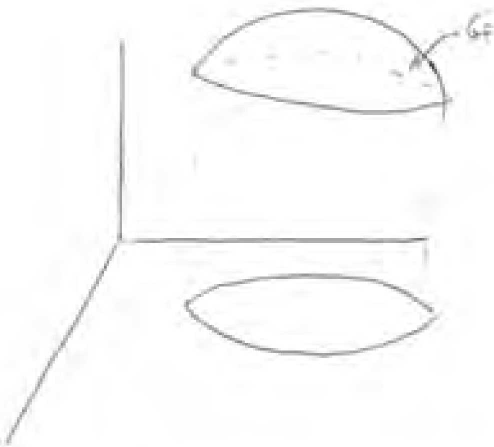
$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x,y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν όχι} \end{cases}$

$\forall (x,y) \in D \ \exists! \ z \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) \in G_f$

Γράφημα $G_f \subseteq \mathbb{R}^3$

$G_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \wedge f(x,y) = z\}$



$A = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \wedge 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

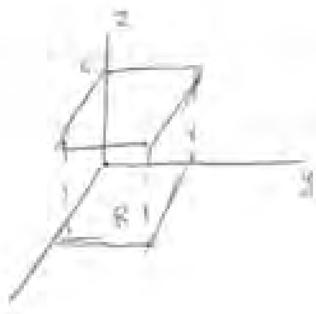
Δηλαδή όλα τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια G_f.

• Αντίστοιχος ορισμός: Αν υπάρχει ο όγκος του A, V(A), αυτός λέγεται ολοκλήρωμα της συνάρτησης f στο D κ συμβολίζεται $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ (Διπλό ολοκλήρωμα)

Παράδειγμα I

$R = [0,1] \times [0,1] \quad f: R \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = c = \text{σταθ.}$

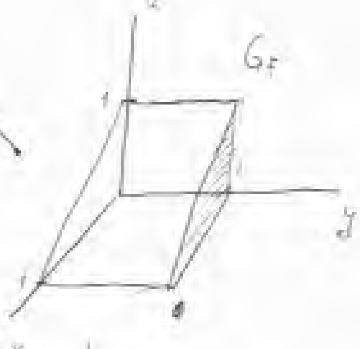
$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 1 \cdot 1 \cdot c = c$



Παράδειγμα II

$R=[0,1]\times[0,1]$ $f:R\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=1-x$

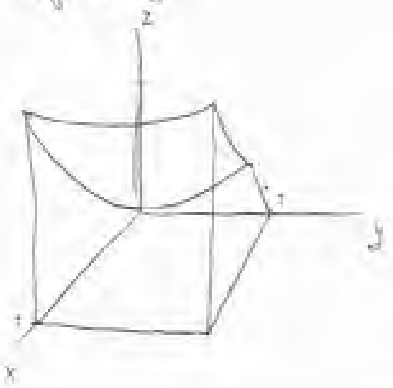
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}$$

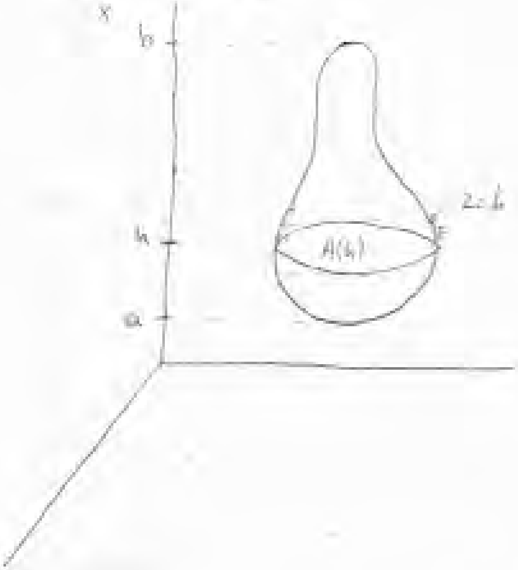


Παράδειγμα III

$R=[0,1]\times[0,1]$

$f:R\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=x^2+y^2$



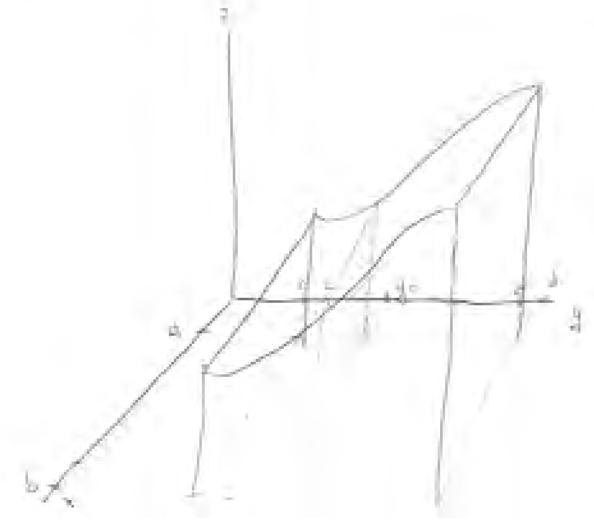


Υπάρχει μια μέθοδος υπολογισμού όγκων από τον 19ο αι., γνωστή ως "Αρχή του Cavallieri". Υποθέτουμε ότι σε ένα σχήμα S (του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο) είναι γνωστή μια συνάρτηση ~~...~~ $h\to A(h)\in\mathbb{R}$, η οποία δίνει το εμβαδόν της τομής $S\cap E$, όπου E το επίπεδο $z=h$.

Αν θεωρήσουμε μια διαμέριση του $[a,b]$ $a=h_0<h_1<h_2<\dots<h_n=b$ τότε μια εκτίμηση για τον όγκο του S θα ήταν $S_n=\sum_{i=1}^{n}A(\xi_i)(h_{i+1}-h_i)$ όπου $\xi_i\in[h_i,h_{i+1}]$.

$$n\to+\infty \quad S_n\to\int_a^b A(h)\,dh$$

$x \to f(x,y) = z$



Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν. Θεωρούμε: $A(y)$ [illegible] για $y \in [c,d]$

$$A(y_0) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Από την Αρχή Cavalieri θα έχουμε

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \overset{\text{όμοια}}{=}$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Τα $\int_c^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$ κ' $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$ λέγονται **διαδοχικά ολοκληρώματα**

Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τότε $\int_a^b f(x,y)\,dx$: $\mathbb{R} \ni y_0 \to \mathbb{R}$

<u>Λύση παραδείγματος III</u>

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx =$$

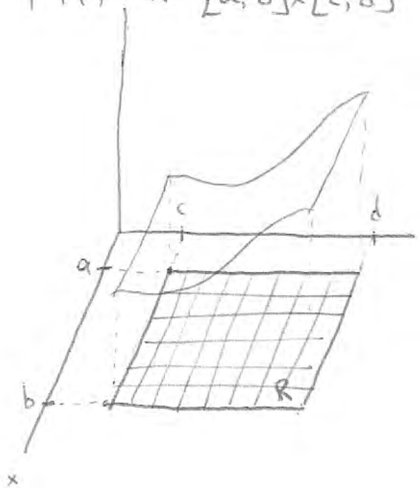
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

★ Για το σπίτι: $f(x,y) = x^2 + y^2$ $R = [-1,1] \times [0,1]$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

$$\iint_{R'} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-1}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = \left[\frac{2y}{3} + \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι το σύνολο στο οποίο ολοκληρώνουμε είναι ένα ορθογώνιο. Δηλαδή είναι της μορφής $R=[a,b]\times[c,d]$



Διαμέριση του $R=[a,b]\times[c,d]$ λέγεται ένα σύνολο από $2(n+1)$ σημεία που ισαπέχουν

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

$c=y_0<y_1<\dots<y_n=d$

ώστε $x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$

κ' $y_{i+1}-y_i=\frac{d-c}{n}$

Χωρίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο το R σε n^2 ίσα ορθογώνια, τα $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]=R_{ij}$, $0\le i,j\le n-1$

Διαλέγουμε σημεία $\vec{c}^{\,n}_{ij}\in R_{ij}$ κ' σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S^n=\sum_{j,i=0}^{n-1}\left(f(\vec{c}^{\,n}_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)\right)=S^n\left((c^n_{ij})_{i,j=0}^{n-1}\right)$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_n S^n$ κ' είναι ανεξάρτητο από τις επιλογές $\left((c^n_{ij})_{i,j=0}^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε λέμε ότι η f **είναι ολοκληρώσιμη** κ' το ολοκλήρωμά της συμβολίζεται

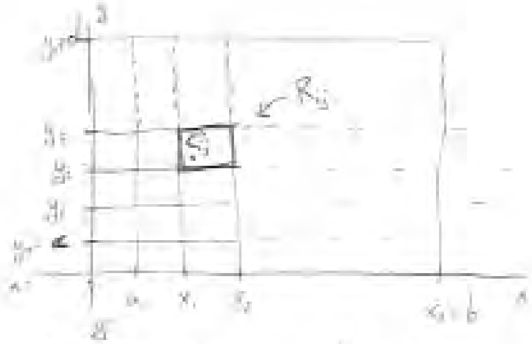
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\lim_n S^n$$

ΤΡΙΤΗ 20/11/2007 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ (1)

→ Αυστηρός ορισμός διπλού ολοκληρώματος

$f: R \to \mathbb{R}$, $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $R = [a,b]\times[c,d]$

f φραγμένη



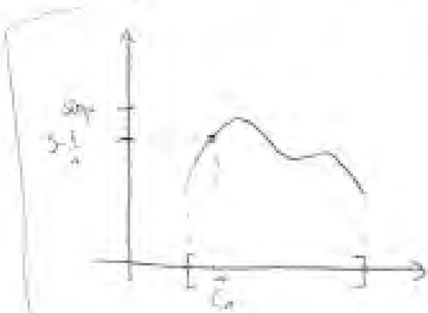
Θέλουμε να ορίσουμε το $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

Δοθέντος $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε σημεία $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ όπου $x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$ και $c=y_0<y_1<\dots<y_n=d$ όπου $y_{j+1}-y_j=\frac{d-c}{n}$

Για $0\le i\le n-1$ και $0\le j\le n-1$ ορίζουμε $R_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ και διαλέγουμε σημείο $\vec{c}_{ij}\in R_{ij}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_n=\sum_{i,j=0}^{n} f(\vec{c}_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$

Παρατήρηση: Το S_n δεν εξαρτάται μόνο από το n, αλλά και από την επιλογή των σημείων $\vec{c}_{ij}$. Αν συμβαίνει και υπάρχει $\ell\in\mathbb{R}$ ώστε για οποιαδήποτε επιλογή σημείων $\vec{c}_{ij}$, $S_n\to\ell$, τότε η f λέγεται ολοκληρώσιμη και $\ell=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

Υποθέτουμε ότι f είναι συνεχής. Τα ορθογώνια $R_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ (κλειστό και φραγμένο* υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$) που είναι συμπαγή και η f ως συνεχής παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο R_{ij}. Έστω $M_{ij}=\sup f(R_{ij})$ θα υπάρχουν $\vec{c}_n\in R_{ij}$ ώστε $f(\vec{c}_n)\to M_{ij}$



$M_{ij}\ge f(\vec{c}_n) > M_{ij}-\frac{1}{n}$

$f(\vec{c}_n)\to M_{ij}$

$\exists\, \vec{c}_{k_n}\to \vec{c}_0\in R_{ij}$

Τότε $f(\vec{c}_0)=M_{ij}$

* κλειστό + φραγμένο = συμπαγές

Έστω τώρα, $M_{ij}=\max f(R_{ij})=f(\vec{c}_{ij}^{\,M})$ και $m_{ij}=\min f(R_{ij})=f(\vec{c}_{ij}^{\,m})$ Σχηματίζω τα

$$S_n^M=\sum_{i,j=0}^{n} f(\vec{c}_{ij}^{\,M})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

$$S_n^m=\sum_{i,j=0}^{n} f(\vec{c}_{ij}^{\,m})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

ΤΕΤΑΡΤΗ 14/11/2007 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Τετάρτη θα γίνει ενοποίηση τμημάτων για 8^{45}-10^{30}

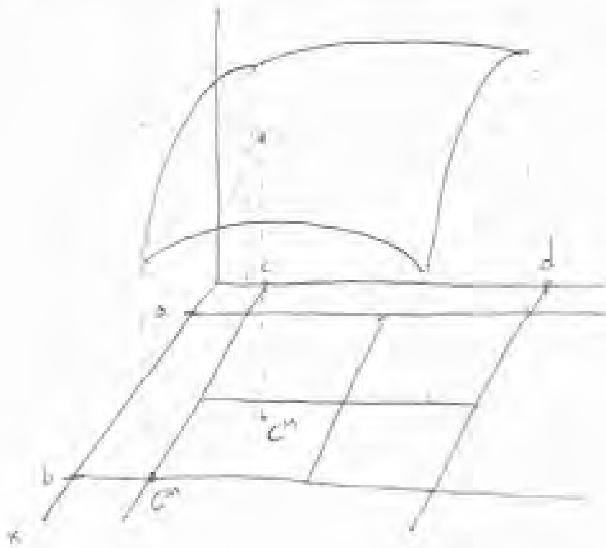
Το μάθημα της Πέμπτης μάλλον θα μεταφερθεί για Τρίτη

Άσκηση 1 Κεφ. VII

vi) $$\int_1^{2-y}(x+y)^2\,dx = \left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]_1^{2-y} = \frac{2^3}{3} - \frac{(1+y)^3}{3} = \frac{2^3-(1+y)^3}{3}$$

$$\int_0^1\left(\frac{2^3-(1+y)^3}{3}\right)dy = \left[\frac{8y-\frac{(1+y)^4}{4}}{3}\right]_0^1 = \frac{8-4}{3}+\frac{1}{12} = \frac{16}{12}+\frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

Αν F ολοκληρώσιμη, τότε $S_n^M, S_n^m \to I = \iint_R F(x,y)\,dx\,dy$



$F(c_{ij}^M)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) = F(c_{ij}^M)E_{ij}$

$F(c_{ij}^m)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) = F(c_{ij}^m)E_{ij}$

όπου E_{ij} το εμβαδό του R_{ij}

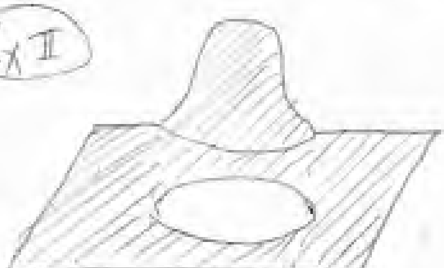
<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ορθογώνιο $R=[a,b]\times[c,d]$ είναι ολοκληρώσιμη.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Μια συνάρτηση $F: R \to \mathbb{R}$, όπου R ορθογώνιο, είναι ολοκληρώσιμη με τον τρόπο που περιγράψαμε αν κ' μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της F στο R δεν έχει εμβαδόν.

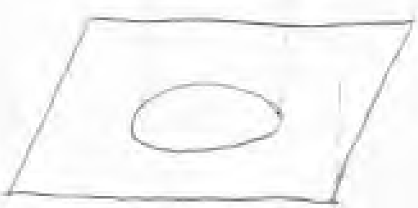
Παρ. Ι $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x,y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x,y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $R=[a,b]\times[c,d]$

Δεν είναι ολοκληρώσιμη αφού όλα τα σημεία του ορθογωνίου είναι σημεία ασυνέχειας κ' το ορθογώνιο <u>έχει</u> εμβαδόν.

Παρ. ΙΙ



Τα σημεία ασυνέχειας είναι η έλλειψη (κ όχι κ' το εσωτερικό της), επομένως το σύνολό τους δεν ορίζει μη μηδενικό εμβαδόν. Άρα η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.



→ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

i) $f,g : R\to\mathbb{R}$, $R=[a,b]\times[c,d]$ κ' είναι ολοκληρώσιμες, $\kappa\in\mathbb{R}$.
Τότε οι συναρτήσεις $f+g$, κf είναι ολοκληρώσιμες κ'

$$\iint_R (f+g)(x,y)\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

Αφού $\sum_{i,j=0}^{n} (f+g)(\vec{c}_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) =$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(\vec{c}_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) + \sum_{j=0}^{n} g(\vec{c}_{ij})(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \to \iint_R f + \iint_R g \quad ■$$

Γραμμικότητα

ii) Αν $f(x,y)\le g(x,y)$, $\forall (x,y)\in R$ τότε $\iint_R f \le \iint_R g$

Μονοτονία

<u>Απόδειξη</u>: Αν $h\ge 0$ κ' ολοκληρώσιμη, τότε $\iint_R h(x,y)\,dxdy = \lim_n \sum_{i,j=0}^{n} h(\vec{c}_{ij})\cdot E_{ij} \ge 0$
(Το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνάρτησης είναι μη αρνητικός αριθμός)
Αν $f(x,y)\ge g(x,y)$ $\forall (x,y)\in R \Rightarrow f-g\ge 0$ άρα $\iint_R (f(x,y)-g(x,y))\,dxdy \ge 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dxdy \ge \iint_R g(x,y)\,dxdy \quad ■$$

iii) Αν f ολοκληρώσιμη στο R, τότε κ' $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο R κ'

$$\left|\iint_R f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_R |f(x,y)|\,dxdy.$$

Αν $|f|$ ολοκληρώσιμη, τότε $-|f|\le f\le |f| \Rightarrow -\iint_R |f|\,dxdy \le \iint_R f\,dxdy \le \iint_R |f|\,dxdy \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\iint_R f\,dxdy\right| \le \iint_R |f|\,dxdy \quad ■$$

ΘΕΩΡΗΜΑ FUBINI (1η μορφή):

Υποθέτουμε ότι f συνεχής στο $R=[a,b]\times[c,d]$. Τότε $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy =$

$$= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $F:[c,d]\to\mathbb{R}$ με $F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$, οπότε

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_c^d F(y)\,dy \quad (1)$$

Αν $n\in\mathbb{N}$ κ' πάρω διαμέριση $c=y_0<y_1<\dots<y_n=d$, όταν $y_{j+1}-y_j=\frac{d-c}{n}$, τότε

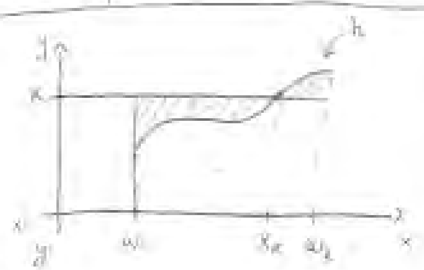
$$(1)\to \lim_n \sum_{j=0}^{n-1} F(\xi_j)(y_{j+1}-y_j) \overset{(2)}{,} \text{ όπου } \xi_j\in[y_j,y_{j+1}].$$

$F(\xi_j)=\int_a^b f(x,\xi_j)\,dx$ κ' αν $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, με $x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$, τότε

$$F(\xi_j)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\xi_j)\,dx \quad (3)$$

Θα υπάρχουν $\omega_i\in[x_i,x_{i+1}]$ ώστε

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\xi_j)\,dx = f(\omega_i,\xi_j)(x_{i+1}-x_i) \quad (4)$$

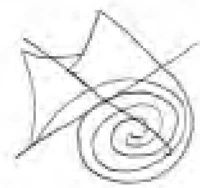


<u>Θεώρημα μέσης τιμής</u>

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} h(x)\,dx = \kappa\,(\omega_2-\omega_1) = h(x_0)(\omega_2-\omega_1)$$

Συνδυάζοντας τις (2), (3) κ' (4) έχουμε ότι $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \lim_n \sum_{i,j=0}^{n-1} f(\omega_i,\xi_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) =$

$$= \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \quad \blacksquare$$



Παράδειγμα. $f: R=[-2,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(x,y)=y(x^3-12x)$ κ ζητείται το $\iint_R f\,dx\,dy$

Η f είναι συνεχής, οπότε (από το θεώρημα Fubini) έχουμε, $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{1}\int_{0}^{1} y(x^3-12x)\,dy\,dx =$

$$= \int_{-2}^{1}\left(\int_{0}^{1} y(x^3-12x)\,dy\right)dx = \int_{-2}^{1}\left[\frac{y^2}{2}(x^3-12x)\right]_0^1 dx = \int_{-2}^{1}\frac{1}{2}(x^3-12x)\,dx = \left[\frac{x^4}{8}-6x^2\right]_{-2}^{1} = \dots$$

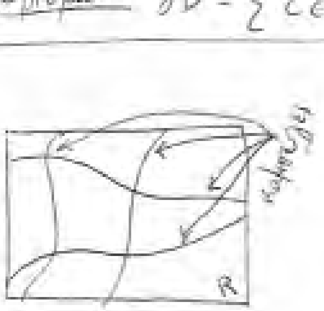
Θεώρημα (Θεωρία μέτρου)

Μια απεικόνιση $f: R\to\mathbb{R}$ με $R\subseteq\mathbb{R}^2$ είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν το σύνολο ασυνέχειας της f έχει μηδενικό εμβαδόν.

Το χωρίο ολοκλήρωσης της f (εάν είναι μη κανονικό), πρέπει να είναι ένα σχετικά καλό χωρίο. Παράδειγμα για μη σχετικά καλό χωρίο είναι

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1,\ x,y\in\mathbb{Q}\}$$
$$\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$$

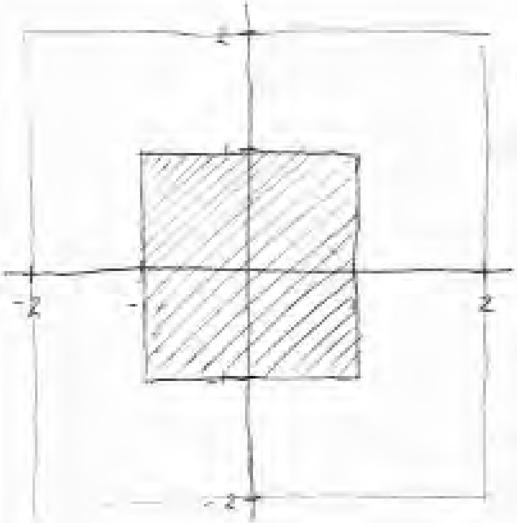
$$\boxed{\text{Ορισμός: } \partial D=\{z\in\mathbb{R}^2:\forall\varepsilon>0,\ B(z,\varepsilon)\cap D\neq\emptyset\ \&\ B(z,\varepsilon)\cap(\mathbb{R}^2\setminus D)\neq\emptyset\}}$$



Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι η $f: R\to\mathbb{R}^2$, $R=[a,b]\times[c,d]$ κ τα σημεία ασυνέχειας της περιέχονται σε μια πεπερασμένη ένωση από γραφήματα συνεχών συναρτήσεων (καμπύλες). Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

$R_1 = [-2,2]\times[-2,2]$ $\quad f: R_1 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{αν } (x,y)\in R_2\\ 0, & \text{αν } (x,y)\in R_1\setminus R_2\end{cases}$

$R_2 = [-1,1]\times[1,1]$



Αν A τα σημεία ασυνέχειας της f, τότε

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-1,\ -1\le y\le 1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1,\ -1\le x\le 1\} \cup$
$\cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=1,\ -1\le y\le 1\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-1,\ -1\le x\le 1\}$

Είναι μηδενικού εμβαδού

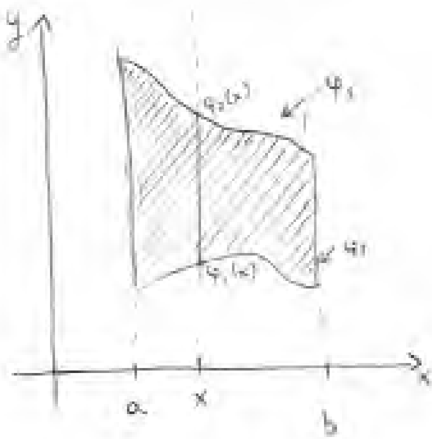
→ Θεώρημα Fubini (β' μορφή)

Υποθέτουμε ότι $f: R\to\mathbb{R}^2$, $R=[a,b]\times[c,d]$, τέτοια ώστε τα σημεία ασυνέχειας της βρίσκονται σε πεπερασμένη ένωση από γραφήματα συνεχών συναρτήσεων. Αν $\forall x\in[a,b]$ το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ υπάρχει, τότε $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$. Αναλόγως, αν $\forall y\in[c,d]$ υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x,y)\,dx$, τότε $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$

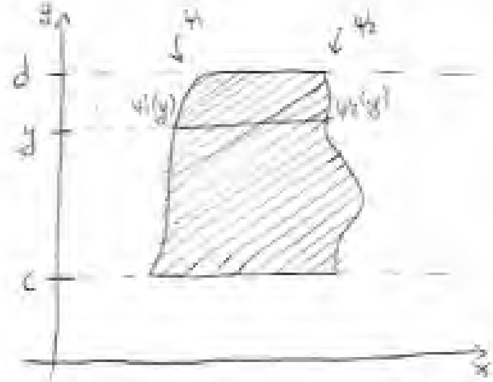
→ D στα οποία μπορούμε να βρίσκουμε ολοκλήρωμα

- $D\subseteq\mathbb{R}^2$ λέμε ότι είναι τύπου I (ή **απλό ως προς x**) αν υπάρχουν $a<b$ στο $\mathbb{R}$ κ' συνεχείς συναρτήσεις $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ $\forall x\in[a,b]$, ώστε $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b$ κ' $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$.
- $D\subseteq\mathbb{R}^2$ λέμε ότι είναι τύπου II (ή **απλό ως προς y**) αν $\exists c,d\in\mathbb{R}$ με $c<d$ κ' συνεχείς συναρτήσεις $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ με $\psi_1(x)\le\psi_2(x)$, $\forall y\in[c,d]$, ώστε $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d$ κ' $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$
- $D\subseteq\mathbb{R}^2$ λέμε ότι είναι τύπου III ( ) αν είναι τύπου I κ' τύπου II.

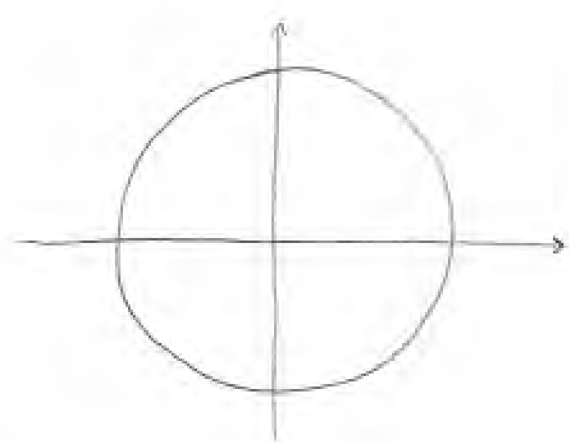
Τύπου I



Τύπου II



Το $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le r^2\}$ είναι τύπου III.



$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}\\ \varphi_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}\end{array}\right\}$ κατ' αυτόν τον τρόπο είναι απλό ως προς x

$\left.\begin{array}{l}\psi_1(y)=\sqrt{r^2-y}\\ \psi_2(y)=-\sqrt{r^2-y}\end{array}\right\}$ κατ' αυτόν τον τρόπο είναι απλό ως προς y

Παράδειγμα

Δεν είναι τύπου I. Αν το χωρίσω σε 4 "κομμάτια", τότε αυτά θα είναι τύπου I.

Ορισμός. Έστω ότι $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b \ \&\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}\subseteq\mathbb{R}$ (τύπου I) ή $f: D\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Θέλουμε να ορίσουμε το $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. Θεωρούμε ορθογώνιο $R=[\omega_1,\omega_2]\times[c_1,c_2]$. $(R\supset D)$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f^*: R\to\mathbb{R}$ ως εξής: $f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{αν } (x,y)\in D\\ 0, & \text{αν } (x,y)\in R-D\end{cases}$

Παρατήρηση: Τα σημεία ασυνέχειας της f^* βρίσκονται σε μια πεπερασμένη ένωση από γραφήματα συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η f^* είναι ολοκληρώσιμη.

Ορίζουμε $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_R f^*(x,y)\,dx\,dy$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$

Συμπαγές = κλειστό + φραγμένο

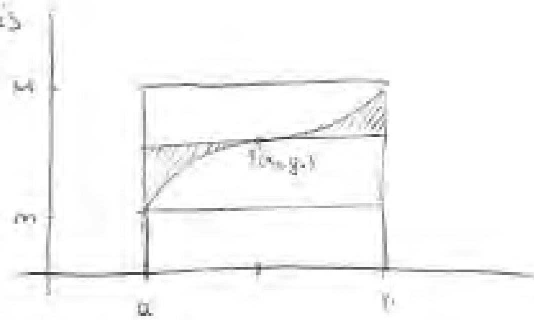
- Τύπου Ι: $D = \{(x,y): a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

φ_1, φ_2 συνεχείς

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

- Τύπου ΙΙ: $D = \{(x,y): c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$, ψ_1, ψ_2 συνεχείς

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$



Θεώρημα Μέσης Τιμής

Υποθέτουμε ότι $f: D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, όπου D χωρίο τύπου Ι, ΙΙ ή ΙΙΙ. Έστω $m = \min\{f(x,y): (x,y) \in D\}$ κ' $M = \max\{f(x,y): (x,y) \in D\}$ (υπάρχει, γιατί f συνεχής σε φραγμένο D). Αν $E(D)$ είναι το εμβαδόν του D, τότε υπάρχει $(x_0,y_0) \in D$, ώστε $m \cdot E(D) \le \iint_D f(x_0,y_0)\,dx\,dy \le M \cdot E(D)$ κ' $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)E(D)$

Απόδειξη: Για το πρώτο, παρατηρούμε ότι $\forall (x,y) \in D$, $m \le f(x,y) \le M$. Από τη μονοτονία του ολοκληρώματος έχουμε $\iint_D m\,dx\,dy \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D M\,dx\,dy \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow m\,E(D) \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M\,E(D). \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) θα έχουμε ότι $m \le \dfrac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{E(D)} \le M$

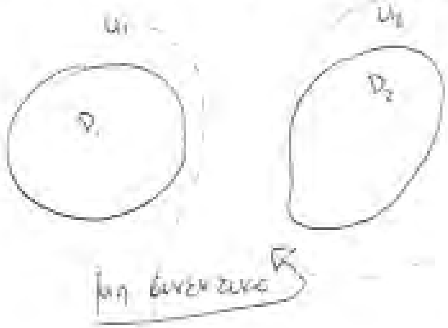
Από την συνέχεια της f κ' το γεγονός ότι το D είναι συνεκτικό, έπεται ότι

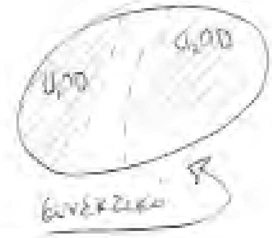
$\exists (x_0,y_0) \in D: f(x_0,y_0) = \iint f(x,y)\,dx\,dy \dfrac{1}{E(D)}$

Αν $E(D) = 0$, είναι προφανές ότι $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ ■

• Ορισμός: Ένα $D \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται συνεκτικό, αν δεν υπάρχουν $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^2$ ανοιχτά, ώστε

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ κ' $D = (U_1 \cap D) \cup (U_2 \cap D)$





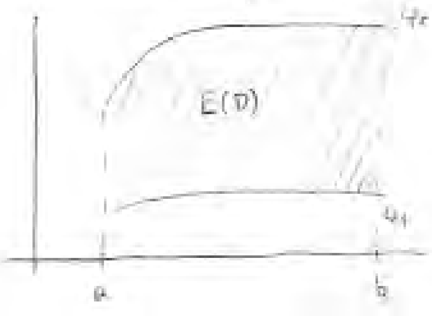
Για να ισχύει το λήμμα, αρκεί το D να ορίζεται το ολοκλήρωμα $\iint_D dxdy$ (θεωρία μέτρου)

Λήμμα: Αν το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι τύπου I, II ή III, τότε $\iint_D 1\, dxdy = E(D)$ = εμβαδόν του D.

Απόδειξη: Για D τύπου I, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ με φ_1, φ_2 συνεχείς.

$$\iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\, dy \right) dx = \int_a^b \Big[y \Big]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx = \int_a^b |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|\, dx,$$

που είναι το εμβαδόν του D.



$$E(D) = \int_a^b \varphi_2(x)dx - \int_a^b \varphi_1(x)dx$$

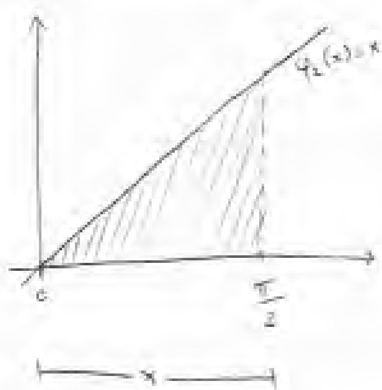
Στη γενική περίπτωση για το D, $\exists c > 0$

$\varphi_2(x) + c, \varphi_1(x) + c \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$

$\left(c = -\min\{\varphi_1(x) : x \in [a,b]\}\right)$ Οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$E(D) = \int_a^b (\varphi_1(x) + c)\, dx - \int_a^b (\varphi_2(x)dx + c)\, dx = \int_a^b \varphi_1(x) dx - \int_a^b \varphi_2(x) dx$$

Παράδειγμα Ι: $\iint_T (x^3y+\cos x)\,dxdy$, όπου $T=\{(x,y): 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ 0\le y\le x\}$



$$\iint_T (x^3y+\cos x)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^x (x^3y+\cos x)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{x^3\cdot y^2}{2}+y\cos x\right]_0^x =$$

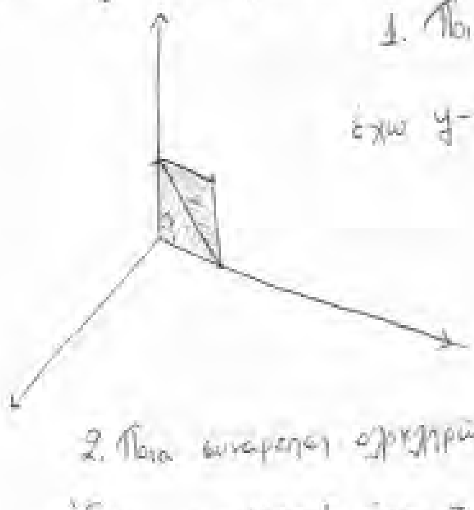
$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{x^5}{2}+x\cos x\right)dx = \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x(\sin x)'\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} + \left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} + \left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} + \left[\cos x\right]_0^{\pi/2}.$$

Αν θέλουμε ν' αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, παρατηρούμε ότι $D=\{(x,y): 0\le y\le \frac{\pi}{2},\ y\le x\le \frac{\pi}{2}\}$

Οπότε, $\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_y^{\pi/2}(x^3y+\cos x)\,dx\right)dy = \dots$

Παράδειγμα ΙΙ: Να βρούμε τον όγκο του τετραέδρου που φράσσεται από τα $z=0$, $x=0$, $y=0$ κ' $y-x+z=1$



1. Ποιο είναι το D? (είναι η προβολή του όγκου στο επίπεδο xOy)

έχω $y-x+z=1$. Για $z=0$, $y=x+1$

Άρα, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 0$ κ' $0\le y\le 1+x\}$

2. Ποια συνάρτηση ολοκληρώνουμε;

Έχω $y-x+z=1$, άρα $z=1+x-y$ κ' αυτήν ολοκληρώνουμε.

$$\iint_D (1+x-y)\,dxdy = \int_{-1}^0\left(\int_0^{1+x}(1+x-y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^0\left[y+xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1+x}dx =$$

$$= \int_{-1}^0\left(1+x+x(1+x)-\frac{(1+x)^2}{2}\right)dx = \int_{-1}^0\left(1+x+x+x^2-\frac{1}{2}+x+\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_{-1}^0\left(\frac{1}{2}+3x+\frac{3x^2}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{2}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

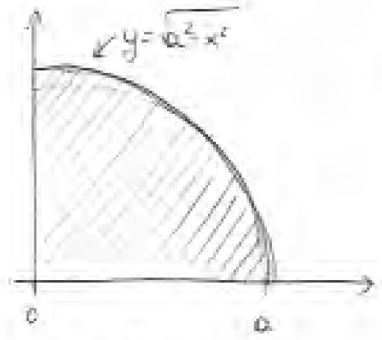
Παράδειγμα III

(Με αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης)

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dy\,dx , \quad a>0$$

[Χωρίς σειρά ολοκλήρωσης θα έπρεπε να θέσω $y^2 = a\sin^2 x$]

$D = \{(x,y) : 0 \le x \le a$ κ' $0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2}\}$



Κάνω το D τύπου II.

$D = \{(x,y) : 0 \le y \le a$ κ' $0 \le x \le \sqrt{a^2-y^2}\}$

Άρα, $$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}\,dx \right) dy = \int_0^a \left[x\sqrt{a^2-y^2} \right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^a (a^2-y^2)\,dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}.$$

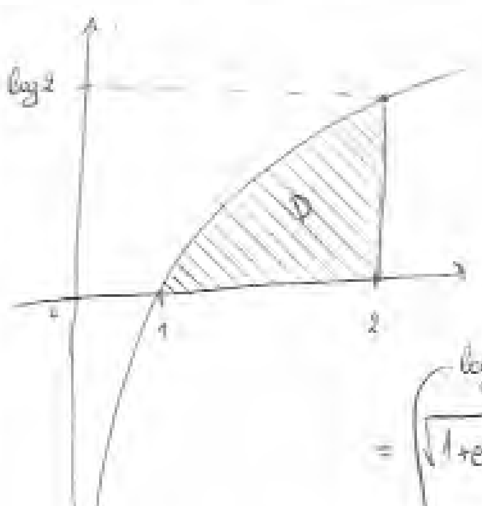
Παράδειγμα IV (αναγκαστική αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης)

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy \cdot dx$$

$D = \{(x,y) : 1 \le x \le 2$ κ' $0 \le y \le \log x\}$

Κάνω το D τύπου II.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \log 2 ,\ e^y \le x \le 2\}$



Άρα έχω,

$$\int_0^{\log 2} \int_{e^y}^{2} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dx\,dy = \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{e^y}^{2} dy =$$

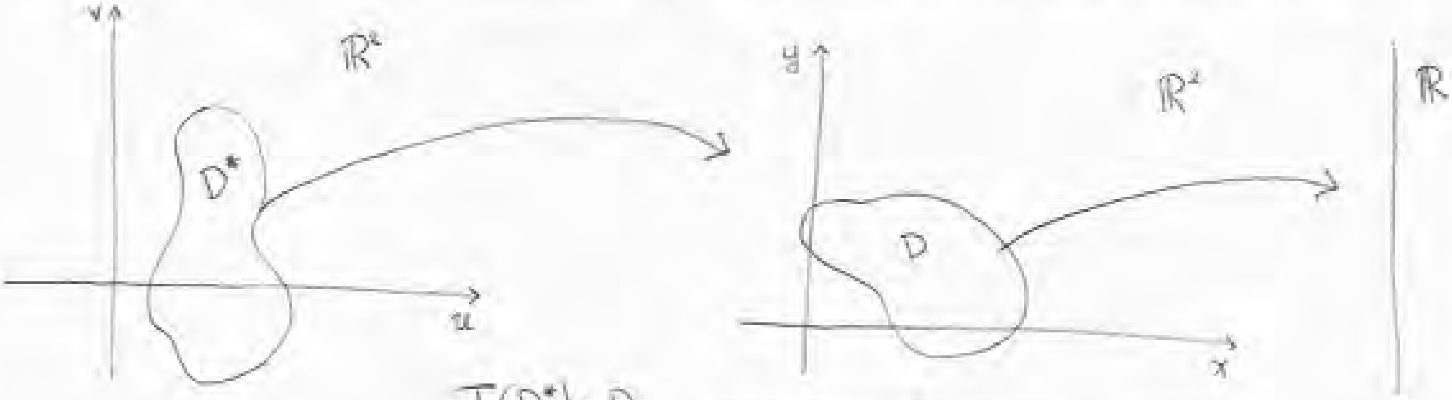
$$= \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(e^y - \frac{e^{2y}}{2} \right) dy =$$

Θέτω $\omega = 1+e^{2y}$ κλπ.

=

• <u>Το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών</u>

Έστω μετασχηματισμός $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ να αλλάξει μεταβλητές.
x,y είναι οι αρχικές μας μεταβλητές κι ολοκληρώνουμε την συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$



$T(D^*) = D$

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

<u>Παρατήρηση</u> Δεν ισχύει κατ' ανάγκη ότι

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f\circ T(u,v)\,du\,dv = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\,du\,dv$$

Μπορούμε να το δούμε αυτό, αν π.χ. ολοκληρώσουμε τη σταθερή συνάρτηση 1.

$$\text{Εμβαδόν}(D) = \iint_D dx\,dy \neq \iint_{D^*} 1\,du\,dv = \text{Εμβαδόν}(D^*)$$

Λείπει, λοιπόν (στον αρχικό τύπο) ένας όρος που μετασχηματίζει τα εμβαδά κατ' αναλογία με τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, όπου αν $x=\varphi(u)$ τότε $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(u))\,\underline{\underline{\varphi'(u)}}\,du$

Ο όρος αυτός για συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

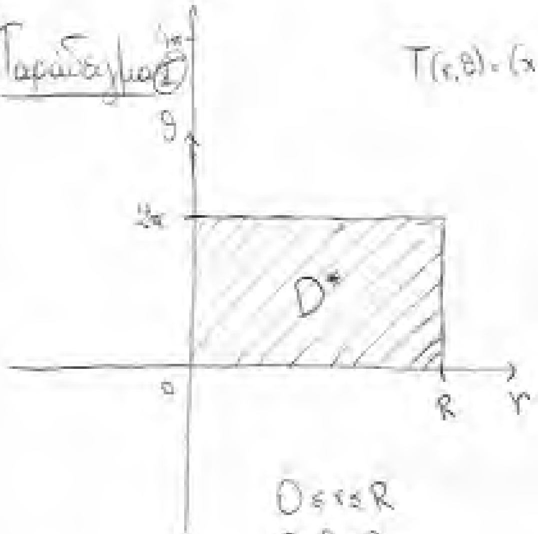
→ Θεώρημα: Υποθέτουμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένη ή κλειστή. Και $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι μια C_1 αντιστοίχηση (δηλαδή έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης). Αν $D^* \subseteq \mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε $T(D^*) = D$ κ' η T είναι 1-1 στο D^* εκτός ίσως από ένα σύνολο εμβαδού 0. Τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv.$$

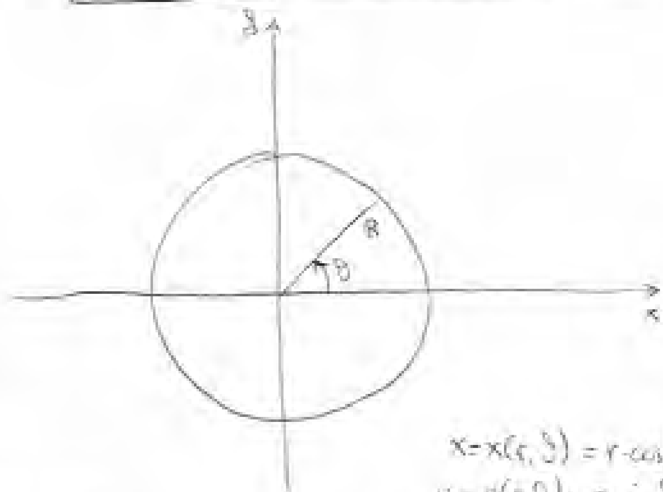
* Με τον μετασχηματισμό αυτό διευκολύναμε την ολοκλήρωση, αφού από κυκλικό χωρίο D, ολοκληρώνουμε σε ορθογώνιο χωρίο D^*

Παράδειγμα 1

$T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$



$0 \le r \le R$
$0 \le \theta \le 2\pi$



$x = x(r,\theta) = r \cdot \cos\theta$
$y = y(r,\theta) = r \cdot \sin\theta$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$

Αν εξαιρέσουμε ένα σύνολο σημείων (τα οποία έχουν μηδενικό εμβαδό) ο μετασχηματισμός αυτός είναι 1-1

Ανάλογο θεώρημα ισχύει για ολοκλήρωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών

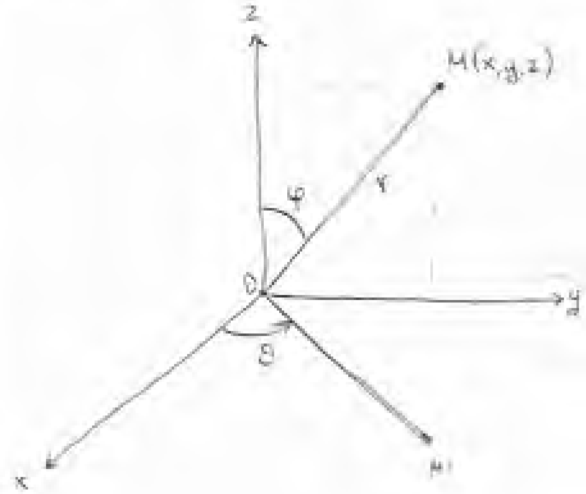
→ Τυπικοί μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται

στον $\mathbb{R}^2$	στον $\mathbb{R}^3$
• Γραμμικοί μετασχηματισμοί	• Γραμμικοί μετασχηματισμοί
• Μετασχηματισμοί σε πολικές συντεταγμένες	• Μετασχηματισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες
	• Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες

* Κυλινδρικές συντεταγμένες = πολικές συντεταγμένες της προβολής του σημείου στο επίπεδο xOy + ύψος z

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \sin\theta \\ y &= r \cdot \cos\theta \\ z &= z \end{aligned}}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες



$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le r$

$z = r\cdot\cos\varphi$

$OM' = r\cdot\sin\varphi$

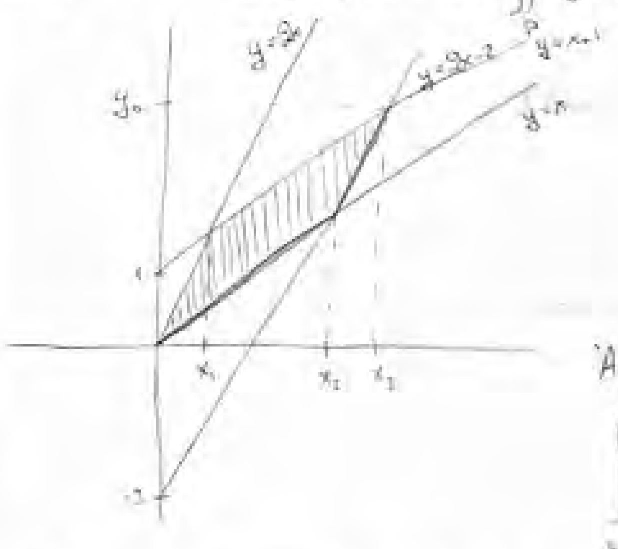
$x = OM'\cdot\cos\theta = r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta$

$y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta = OM'\cdot\sin\theta$

Παράδειγμα γραμμικού μετασχηματισμού (II)

P το παραλληλόγραμμο που φράσσεται από τις $y=2x,\ y=2x-2,\ y=x,\ y=x+1$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $I = \iint xy\,dx\,dy$



$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le x_2 \\ 2x-2, & x_2 < x < x_3 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le x_1 \\ x+1 & x_1 < x < x_3 \end{cases}$$

Άρα (χωρίς μετασχηματισμό) έχω

$$\int_0^{x_3}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} xy\,dy\,dx$$, όπου θα πρέπει να το σπάσω σε τρία ολοκληρώματα

Για να κάνω τον μετασχηματισμό υπολογίζω $-2 \le y-2x \le 0$

$0 \le y-x \le 1$

Αν έτσι θεωρήσω $u = y-2x$ και $v = y-x$, τότε $D^* = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u\in[-2,0] \text{ και } v\in[0,1]\} =$

$= [-2,0]\times[0,1]$

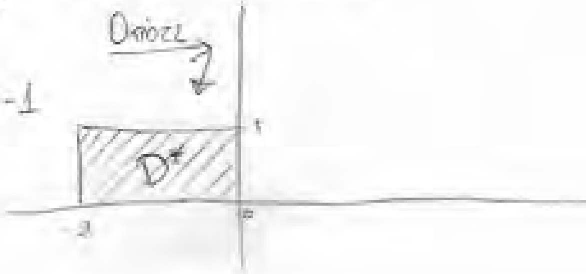
Πρέπει να υπολογίσω και την Ιακωβιανή: $\left.\begin{aligned} x &= v-u \\ y &= 2v-u \end{aligned}\right\}$ $T(u,v) = (v-u,\ 2v-u)$

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = -1$ $\quad \dfrac{\partial y}{\partial u} = -1$

$\dfrac{\partial x}{\partial v} = 1$ $\quad \dfrac{\partial y}{\partial v} = 2$

Άρα $J = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

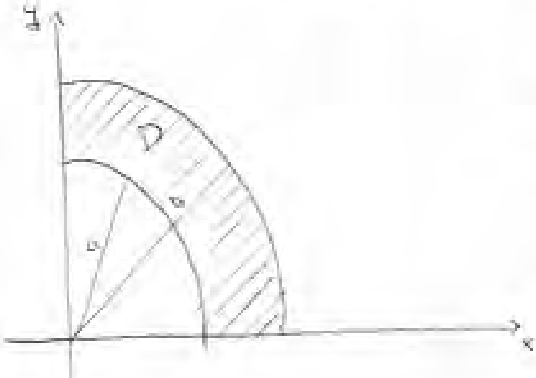
Οπότε



Κ έτσι $I=\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{D^*}(v-u)(2v-u)(-1)\,du\,dv = \int_0^1\int_{-2}^0 (2v^2-3uv+u^2)\,du\,dv$

Παράδειγμα Μετασχηματισμού σε πολικές συντεταγμένες III

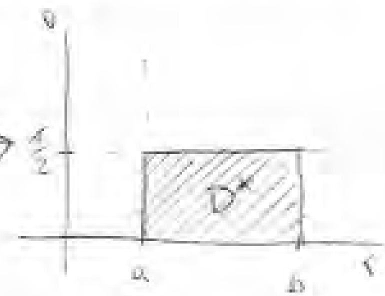
$\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$ Το D βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο κ' περιορίζεται από τις $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$, $(0<a<b)$.



$\left.\begin{array}{l} x=r\cdot\cos\theta \\ y=r\cdot\sin\theta \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$ $T(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$a^2\le r^2\le b^2$ οπότε $a\le r\le b$

$D^*=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2: 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ a\le r\le b\} = [a,b]\times[0,\frac{\pi}{2}]$



Ιακωβιανή

$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta & \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta \\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta & \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cdot\cos\theta \end{array}\right\}$ $J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\cdot\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

> Η Ιακωβιανή στις πολικές συντεταγμένες βγαίνει πάντα r

Άρα $I=\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D^*}(\log r^2)\,r\,dr\,d\theta =$

$= \int_0^{\pi/2}\int_a^b r\cdot\log r^2\,dr\cdot d\theta =$ θέτω $t=r^2 \Rightarrow dt=2r$ ....κλπ

Προσεχώς: Θεώρημα Green κ' Θεώρημα Gauss