ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘ. & ΦΥΣ. ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
157 73 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. : +(30-1)-772 3036 Fax : +(30-1)-772 3025
e-mail: kehagias@central.ntua.gr

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
FACULTY OF APPLIED SCIENCES
PHYSICS DEPARTMENT
ZOGRAFOU CAMPUS
GR 157 73 ATHENS - GREECE
phone : +(30-1)-772 3036 Fax: +(30-1)7723025
e-mail: kehagias@central.ntua.gr

ΜΑΘΗΜΑ: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ II
ΕΞΑΜΗΝΟ: 5^0
ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: $2^{1/2}$ ΩΡΕΣ

Θέμα 1 (1.5 μονάδες):

Έστω ηλεκτρικό πεδίο σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{E} = A\frac{e^{-br}}{r^2}\mathbf{e}_r$$

Να βρείτε:
I) Την πυκνότητα φορτίου που παράγει το συγκεκριμένο ηλεκτρικό πεδίο.
II) Το ολικό φορτίο της κατανομής.

ΑΣΚΗΣΗ 2. (3 μονάδες)

Δίσκος αμελητέου πάχους και ακτίνας R φέρει φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο πάνω του. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα συμμετρίας του δίσκου. $\to V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right]$
I) Ποιά είναι η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου για απόστασεις πολύ μεγαλύτερες της ακτίνας R. Είναι η μορφή αυτή αναμενώμενη;
II) Ποιά είναι η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου για απόστασεις πολύ μικρότερες της ακτίνας R. Είναι η μορφή αυτή αναμενώμενη;
III) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο.

ΑΣΚΗΣΗ 3. (3 μονάδες)

Κύβος ακμής L έχει τη μία έδρα του σε δυναμικό V_0=σταθερό, και όλες οι υπόλοιπες έδρες του βρίσκονται σε δυναμικό μηδέν (είναι γειωμένες). Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό του κύβου. Ποιό το δυναμικό αν δύο εφαπτόμενες ακμές βρίσκονται σε δυναμικό V_0=σταθερό και οι υπόλοιπες τέσσερις είναι μόνον γειωμένες;

ΑΣΚΗΣΗ 4. (2.5 μονάδες)

Σωληνειωδές απείρου μήκους φέρει n σπείρες ανά μονάδα μήκους και διαρέεται από ρεύμα . Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό παντού στο χώρο (μέσα και έξω από το σωληνοειδές).

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ισως σας χρειαστούν:

- Σχέση ηλεκτρικού πεδίου **E** και βαθμωτού δυναμικού Φ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi\,, \tag{1}$$

- Λύση εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες με αξονική συμμετρία:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta) \tag{2}$$

- Μερικά πολυώνυμα Legendre ($x = cos\theta$)

$$P_0(x) = 1\,,\quad P_1(x) = x\,,\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\,,\quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \tag{3}$$

- Επίσης

$$P_\ell(1) = 1,\quad P_\ell(-1) = (-1)^\ell \qquad \ell = 0,1,2,\dots \tag{4}$$

- Τα πολυώνυμα Legendre αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο διάστημα $-1 \le x \le 1$. Έτσι, συναρτήσεις $f(x)$ ορισμένες σε αυτό το διάστημα, μπορούν να γραφούν σαν

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x)\,,\quad A_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_\ell(x)dx \tag{5}$$

- Διανυσματικό δυναμικό λόγω πυκνότητας ρεύματος **J**, στην βαθμίδα Coulomb

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}'\,, \tag{6}$$

- Διανυσματικό δυναμικό ρευματοφόρου αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα I, στην βαθμίδα Coulomb

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\mathbf{l}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,, \tag{7}$$

- Μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}\,, \tag{8}$$

Μαθηματικές σχέσεις που ίσως χρειαστούν:

σε σφαιρικες συντεταγμένες: $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi$

$$\text{και}:\quad \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi \tag{9}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) = 4\pi\delta^{(3)}(r) \tag{10}$$

Επιπλέον ίσως χρειαστούν:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{mn}\,,\quad m,n = 1,2,3,\dots. \tag{11}$$

$$\frac{1}{(1+x)^a} = 1 - ax + \frac{1}{2}a(a+1)x^2 - \frac{1}{6}a\left(a^2+3a+2\right)x^3 + \frac{1}{24}a\left(a^3+6a^2+11a+6\right)x^4 + O\left(x^5\right)$$