Εργαστηριακή άσκηση 5: Μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής (ιξώδους) υγρού με τη μέθοδο της πτώσης μικρών σφαιρών
Ημερομηνία διεξαγωγής: 24/3/2005

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

Μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες των ρευστών είναι το ιξώδες, το οποίο εκφράζει την αντίσταση του ρευστού στην παραμόρφωση από τη δράση διατμητικών τάσεων. (Τα ιδανικά υγρά θεωρούνται ότι είναι ασυμπίεστα και δεν παρουσιάζουν ιξώδες, ενώ τα πραγματικά είναι σε κάποιο βαθμό συμπιεστά και έχουν ιξώδες). Η αύξηση του ιξώδους κάνει το ρευστό πιο παχύρρευστο, ενώ η μείωσή του πιο λεπτόρρευστο.

Η δύναμη εσωτερικής τριβής (ή δύναμη ιξώδους) οφείλεται σε δύο μοριακούς μηχανισμούς: τις δυνάμεις συνοχής μεταξύ των μορίων (δυνάμεις van der Waals) και τη μεταφορά ορμής μέσω των μοριακών συγκρούσεων. Στα υγρά λόγω των μικρών αποστάσεων μεταξύ των μορίων έχουμε πολύ πιο ισχυρές δυνάμεις συνοχής από ότι στα αέρια, έτσι το ιξώδες των αερίων (στα οποία έχουμε πρακτική απουσία των διαμοριακών δυνάμεων) είναι πολύ μικρότερο από αυτό των υγρών. Επίσης, με την άνοδο της θερμοκρασίας το ιξώδες των αερίων αυξάνεται, ενώ των υγρών μειώνεται.

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι κατά την κίνηση των ρευστών γύρω από στερεά όρια τα στοιχεία του ρευστού που έρχονται σε επαφή με το τοίχωμα έχουν την ίδια ταχύτητα με το τοίχωμα και δεν ολισθαίνουν ως προς αυτό. Για σχετικά μικρές ταχύτητες και όταν τα στρώματα του υγρού κινούνται το ένα παράλληλα ως προς το άλλο (δηλαδή όταν η ροή είναι στρωτή και όχι τυρβώδης) η δύναμη ιξώδους δίνεται από τον τύπο:

$$F=-\eta S\frac{du_x}{dy}$$

Όπου η ο συντελεστής ιξώδους του υγρού, S η κοινή επιφάνεια των στρωμάτων και du_x/dy η μεταβολή της συνιστώσας της ταχύτητας που είναι παράλληλη στον άξονα των χ ανά μονάδα μήκους κάθετα στην κίνηση. Ο συντελεστής ιξώδους στο σύστημα S.I. εκφράζεται σε kg/m·s. Στην πράξη όμως χρησιμοποιείται το 1/10 της μονάδας αυτής και λέγεται poise. Τα ρευστά για τα οποία ισχύει αυτή η σχέση ονομάζονται επίσης νευτώνεια ρευστά.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Η εργαστηριακή άσκηση περιλαμβάνει ένα πειράματα και σκοπός της είναι ο προσδιορισμός του συντελεστή ιξώδους (η) της γλυκερίνης. Η μέτρηση γίνεται με τη μέθοδο της πτώσης μικρών σφαιρών.

Όταν ένα μακροσκοπικό αντικείμενο κινείται μέσα σε ένα υγρό που ηρεμεί, ασκείται πάνω του μια επιβραδυντική δύναμη F. Το μέτρο της δύναμης αυτής, στην περίπτωση μιας μικρής σφαίρας που κινείται με μικρή ταχύτητα, δίνεται από το νόμο του Stokes: $F=-6\pi\eta ru$

Όταν μια σφαίρα πέφτει μέσα στο υγρό υπόκειται σε τρεις δυνάμεις: το βάρος της $B=\rho_\sigma gV$, την άνωση $A=\rho_\upsilon gV$, και τη δύναμη τριβής $F=-6\pi\eta ru$.
Όπου ρ_σ η πυκνότητα της σφαίρας και ρ_υ η πυκνότητα του υγρού.

Η εξίσωση κίνησης της σφαίρας είναι: m $\frac{du}{dt}$=B-F-A↔ m $\frac{du}{dt}$ = $\rho_\sigma gV$- $\rho_\upsilon gV$-6πηru (1)

Επειδή m=Vρ_σ και V=(4/3)πr^3 η εξίσωση (1) τελικά γίνεται:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\rho_\sigma - \rho_\upsilon}{\rho_\sigma} g - \frac{9\eta u}{2r^2\rho_\sigma} \quad (2)$$

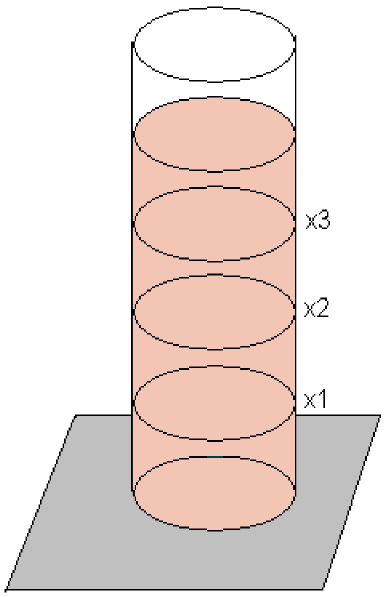
Η σφαίρα αφήνεται να πέσει στο υγρό με σχεδόν μηδενική αρχική ταχύτητα. Από την εξίσωση κίνησης της σφαίρας (2) είναι φανερό ότι η σφαίρα αρχικά θα επιταχύνεται. Όμως με την αύξηση της ταχύτητας θα αυξάνεται και η αντίσταση του υγρού με αποτέλεσμα οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα (το βάρος της, η άνωση και η δύναμη ιξώδους) κάποια στιγμή να έχουν μηδενική συνισταμένη. Εκείνη τη στιγμή θα είναι du/dt=0 και η σφαίρα θα αποκτά μια σταθερή οριακή ταχύτητα (u= $U_{o\rho}$), η οποία προκύπτει από την εξίσωση (2):

$$U_{o\rho}=\frac{(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)2r^2 g}{9\eta} \quad (3)$$

Αν λύσουμε την εξίσωση (3) ως προς η έχουμε:

$$\eta=\frac{(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)2r^2 g}{9u_{o\rho}} \quad (4)$$

Υπολογίζοντας την οριακή ταχύτητα που αποκτούν οι σφαίρες στο υγρό θα βρούμε από την εξίσωση (4) το συντελεστή ιξώδους της γλυκερίνης. Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει πυκνόμετρο, υποδεκάμετρο, χρονόμετρο, θερμόμετρο, μικρόμετρο, μικρές σφαίρες και ένα γυάλινο σωλήνα διαμέτρου 4cm που περιέχει το μελετούμενο υγρό και φέρει τρεις χαραγές χ_1, χ_2, χ_3 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Αρχικά μετράμε τις αποστάσεις s_1 μεταξύ των χαραγών χ_1 και χ_2 και s_2 μεταξύ των χαραγών χ_2 και χ_3 και έχουμε:

s_1=(16,3±0,1)cm

s_2=(16,2±0,1)cm

στις μετρήσεις έχουμε πάρει σφάλμα ανάγνωσης 0,1cm αφού τόση ήταν η ακρίβεια του υποδεκάμετρου που χρησιμοποιήθηκε.

Στη συνέχεια ρίχνουμε διαδοχικά τρεις σφαίρες στο υγρό όσο γίνεται πιο κοντά στο κέντρο του σωλήνα και μετράμε το χρόνο που κάνει η σφαίρα για να διανύσει τα δύο αυτά διαστήματα για να υπολογίσουμε την ταχύτητα της σφαίρας για κάθε διάστημα. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

πίνακας 1

	t_1 (sec)	u_1 (cm/sec)	t_2 (sec)	u_2 (cm/sec)
Σφαίρα 1	8,69±0,01	1,876±0,012	9,06±0,01	1,788±0,011
Σφαίρα 2	8,22±0,01	1,983±0,012	9,15±0,01	1,771±0,011
Σφαίρα 3	8,52±0,01	1,913±0,012	9,12±0,01	1,776±0,011

Όπου t_1 και t_2 ο χρόνος που έκανε η σφαίρα για να διανύσει τις αποστάσεις s_1 και s_2 αντίστοιχα.

Από τα αποτελέσματα του πίνακα 1 παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες u_1 και u_2 που είχε κάθε σφαίρα στα διαστήματα s_1 και s_2 αντίστοιχα είναι περίπου ίσες, άρα μπορούμε να υποθέσουμε με καλή προσέγγιση ότι η σφαίρα έχει αποκτήσει μια οριακή ταχύτητα πριν φτάσει στη χαραγή χ_3.

Η πυκνότητα του υγρού μετρήθηκε (1,237±0,001)g/cm^3 και η θερμοκρασία του (22±1)^{o}C. Η μάζα 10 σφαιρών είναι (0,61±0,01)g. Στις παραπάνω μετρήσεις έχουμε πάρει σφάλμα ανάγνωσης την ελάχιστη υποδιαίρεση της μονάδας που μετρά κάθε όργανο μέτρησης.

Στη συνέχεια μετράμε τις διαμέτρους δέκα σφαιρών και τις ρίχνουμε διαδοχικά στο υγρό ενώ μετράμε το χρόνο που χρειάζεται κάθε σφαίρα για να διανύσει την απόσταση s (s=(32,5±0,1)cm) μεταξύ των χαραγών χ_1 και χ_3. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων, τα σφάλματα ανάγνωσης (για τα μεγέθη δ_i και t_i) και τα μεταδιδόμενα σφάλματα (για τα μεγέθη r_i και u_i) καταχωρούνται στον παρακάτω πίνακα:

πίνακας 2

i	δ_i (mm)	r_i (mm)	t_i (sec)	u_i (cm/sec)
1	2,48±0,01	1,240±0,005	17,29±0,01	1,8797±0,0059
2	2,49±0,01	1,245±0,005	17,18±0,01	1,8917±0,0059
3	2,49±0,01	1,245±0,005	17,10±0,01	1,9006±0,0060
4	2,48±0,01	1,240±0,005	17,10±0,01	1,9006±0,0060
5	2,47±0,01	1,235±0,005	17,04±0,01	1,9073±0,0060
6	2,48±0,01	1,240±0,005	16,87±0,01	1,9265±0,0060
7	2,49±0,01	1,245±0,005	16,77±0,01	1,9380±0,0061
8	2,48±0,01	1,240±0,005	16,83±0,01	1,9311±0,0061
9	2,48±0,01	1,240±0,005	17,06±0,01	1,9050±0,0060
10	2,49±0,01	1,245±0,005	16,93±0,01	1,9197±0,0060

Όπου $u_i=s/t_i$ και το σφάλμα της ταχύτητας δίνεται από τον τύπο

$$\delta u=\frac{s}{t}\sqrt{\left(\frac{\delta s}{s}\right)^2+\left(\frac{\delta t}{t}\right)^2}$$

Η μέση τιμή της ακτίνας των σφαιρών είναι $r=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} r_i$ =1,2415mm

Και το σφάλμα της μέσης τιμής δr= $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(r_i - r)^2}{10(10-1)}}$ =0,0011mm

Η μέση τιμή της ταχύτητας των σφαιρών είναι u= $\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} u_i$ =1.9100cm/sec

Και το σφάλμα της μέσης τιμής δu= $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(u_i - u)^2}{10(10-1)}}$ =0,0058cm/sec

Άρα έχουμε r=(1,2415±0,0011)mm και u=(1,9100±0,0058)cm/sec

Γνωρίζουμε από μέτρηση που έγινε προηγουμένως ότι η ολική μάζα 10 σφαιρών είναι (0,61±0,01)g.
Για τον όγκο των σφαιρών επειδή r=1,2415mm=0,12415cm έχουμε:
$V_{ολ}=10\cdot(4/3)\pi r^3= 0,0802cm^3$
Στον υπολογισμό του όγκου αγνοήθηκε το σφάλμα δr της ακτίνας των σφαιρών
Έτσι, η πυκνότητα ρ_σ των σφαιρών δίνεται:
$\rho_\sigma = \dfrac{m_{ολ}}{V_{ολ}} \pm \dfrac{\delta m_{ολ}}{V_{ολ}}$ =(7,61±0,12)g/cm^3

Για ένα μέγεθος χ εκτός από το απόλυτο σφάλμα δχ της μέσης τιμής χ ορίζεται και το σχετικό σφάλμα, το οποίο μπορεί να εκφραστεί σε ποσοστό επί τοις εκατόν σύμφωνα με τον τύπο $\sigma_{\chi}=100(\delta\chi/\chi)\%$.στον πίνακα 3 δίνονται τα απόλυτα και τα σχετικά σφάλματα για τα μεγέθη: ακτίνα σφαιρών (r), πυκνότητα υγρού (ρ_υ), πυκνότητα σφαιρών (ρ_σ) και οριακή ταχύτητα σφαιρών ($u_{ορ}$):

πίνακας 3

Μέγεθος	Μέση τιμή	Απόλυτο σφάλμα	Σχετικό σφάλμα %
r	1,2415mm	0,0011mm	0,09
ρ_υ	1,237g/cm^3	0,001g/cm^3	0,08
ρ_σ	7,61g/cm^3	0,12g/cm^3	1,58
$u_{ορ}$	1,9100cm/sec	0,0058cm/sec	0,3

Τώρα, με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα και με την εξίσωση (4) μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή ιξώδους της γλυκερίνης και το σφάλμα του. Στον υπολογισμό του σφάλματος δη, θα λάβουμε υπόψη μόνο την πυκνότητα της σφαίρας (ρ_σ), αφού όπως βλέπουμε και στον πίνακα 3, συνεισφέρει στο σφάλμα της τελικής τιμής 5 φορες περισσότερο από το σφάλμα της οριακής ταχύτητας της σφαίρας και 18 φορές περισσότερο από τα σφάλματα της πυκνότητας του υγρού και της ακτίνας της σφαίρας.

Αν θεωρήσουμε ότι g=9,80cm/sec^2 και η ακτίνα της σφαίρας r=0,12415cm είναι:

$$\eta=\frac{(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)2r^2g}{9u_{o\rho}}\pm\left(\sqrt{\frac{\partial\eta}{\partial\rho_\sigma}\delta\rho_\sigma}\right)^2=\frac{(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)2r^2g}{9u_{o\rho}}\pm\frac{\partial\eta}{\partial\rho_\sigma}\delta\rho_\sigma=$$

$$=\frac{(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)2r^2g}{9u_{o\rho}}\pm\frac{2r^2g}{9u_{o\rho}}\cdot\delta\rho_\sigma=11.17\pm0.21\text{g/cm}\cdot\text{sec}$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

Η επιβραδυντική δύναμη F εσωτερικής τριβής που θεωρήσαμε ότι ασκείται στο σώμα υπολογίστηκε στο παραπάνω πείραμα από την εξίσωση του νόμου του Stokes: F=-6πηru. Αυτή η σχέση ισχύει όταν μια σφαίρα μικρής ακτίνας r κινείται με μικρή ταχύτητα μέσα σε υγρό που βρίσκεται σε δοχείο άπειρων διαστάσεων. Στο πείραμα που πραγματοποιήθηκε η ακτίνα των σφαιρών που χρησιμοποιήθηκαν ηταν αρκετά μικρότερη (περίπου 17 φορές) από την ακτίνα του δοχείου. Επίσης, λόγω του σχετικά μεγάλου ιξώδους της γλυκερίνης, η ταχύτητα των σφαιρών παρέμεινε μικρή. Τα παραπάνω αποτελούν μια προσέγγιση των (πρακτικά αδύνατων) ιδανικών συνθηκών που απαιτεί ο νόμος του Stokes, άρα καλώς χρησιμοποιήθηκε.