Ασκηση 6: Μετρηση του Συντελεστη αποκαταστασης κατα την κρουση 2 σφαιρων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ:

Για μακροσκοπικά αντικείμενα σαν κρούση ορίζεται το φαινόμενο κατά το οποίο δύο ή περισσότερα σώματα αλληλεπιδρούν (συγκρούονται) κατά τη διάρκεια της κίνησής τους. Χαρακτηριστικά των κρούσεων είναι η μικρή τους χρονική διάρκεια και οι σχετικά μεγάλες δυνάμεις που αναπτύσσονται στα σώματα που αλληλεπιδρούν (κάτι που είναι λογικό αφού η κινητική κατάσταση των σωμάτων που συγκρούονται αλλάζει σε ελάχιστο χρονικό διάστημα).

Ο λόγος των σχετικών ταχυτήτων δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση ονομάζεται συντελεστής αποκατάστασης (k). Ο συντελεστής αποκατάστασης είναι χαρακτηριστικό του υλικού των σωμάτων, παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1 και εκφράζει το πόσο γρήγορα τα σώματα αποκτούν το αρχικό τους σχήμα μετά την αλληλεπίδραση. Ένας τρόπος μέτρησης του k είναι η μέθοδος των κρούσεων που χρησιμοποιείται και στο παρακάτω πείραμα. Αν k=1 το υλικό χαρακτηρίζεται απολύτως ελαστικό και δεν έχουμε απώλειες ενέργειας κατά την κρούση και στην περίπτωση που k=0 το υλικό χαρακτηρίζεται απολύτως πλαστικό και κατά την κρούση έχουμε ενεργειακές απώλειες αφού ένα μέρος της κινητικής ενέργειας των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα και άλλες μορφές ενέργειας. Στην πραγματικότητα όλα τα υλικά εμφανίζουν ενδιάμεσες ιδιότητες και κανένα δεν είναι απολύτως ελαστικό ή απολύτως πλαστικό.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι ο προσδιορισμός του συντελεστή αποκατάστασης του υλικού δύο όμοιων σφαιρών με τη μέθοδο των κρούσεων, της χρονικής διάρκειας της κρούσης, της ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση και των δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των σφαιρών.

Υπολογισμός του συντελεστή αποκατάστασης:

Ο χρόνος 20 πληρών ταλαντώσεων τις μιας σφαίρας μετρήθηκε:
20T=30,81sec άρα η περίοδος της ταλάντωσης είναι T=1,541sec.
Από τη σχέση (1) το ισοδύναμο μήκος ℓ του μαθηματικού εκκρεμούς υπολογίζεται 59,1cm.

Στον πίνακα 2 φαίνεται η ταχύτητα της σφαίρας β πριν από την πρώτη κρούση και η ταχύτητα της σφαίρας α μετά την εικοστή κρούση. Τα αποτελέσματα της τρίτης και της τέταρτης στήλης του πίνακα έχουν υπολογιστεί από τον τύπο (3). Με τα δεδομένα αυτά από τη σχέση (2) υπολογίζουμε δύο συντελεστές αποκατάστασης (έναν για κάθε αρχική μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας της σφαίρας β). από το μέσο όρο των αποτελεσμάτων παίρνουμε μια τελική τιμή για το συντελεστή αποκατάστασης του υλικού των σφαιρών που υπολογίστηκε: k=0,9840

Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας που χάνεται κατά μία κρούση:

Αν V_o η ταχύτητα της σφαίρας β πριν την πρώτη κρούση και $υ_α$, $υ_β$ οι ταχύτητες των σφαιρών α και β αντίστοιχα μετά την κρούση, μπορούμε να εκφράσουμε τις ταχύτητες αυτές σε συνάρτηση με το συντελεστή αποκατάστασης σύμφωνα με της παρακάτω σχέσεις:

$$υ_α=\frac{V_o}{2}(1+k) \quad (6) \qquad \text{και} \qquad υ_β=\frac{V_o}{2}(1-k) \quad (7)$$

επίσης αν συμβολίσουμε K_1 την κινητική ενέργεια πριν από την κρούση και K_2 την κινητική ενέργεια των σφαιρών μετά την κρούση, έχουμε:

$$K_1=\frac{1}{2}mV_o^2 \qquad \text{και} \qquad K_2=\frac{1}{2}m\,υ_α^2+\frac{1}{2}m\,υ_β^2$$

Η ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι:

$$K_1-K_2=\frac{1}{2}mV_o^2-\frac{1}{2}m\,υ_α^2-\frac{1}{2}m\,υ_β^2=\frac{1}{2}m(V_o^2-υ_α^2-υ_β^2) \qquad (8)$$

Όμως, λόγω των (6) και (7) είναι:

$$V_o^2-υ_α^2-υ_β^2=V_o^2-\frac{V_o^2}{4}(1+k)^2-\frac{V_o^2}{4}(1-k)^2=V_o^2-\frac{V_o^2}{2}(1+k^2)=V_o^2-\frac{V_o^2}{2}-\frac{V_o^2}{2}k^2=$$

$$=\frac{V_o^2}{2}(1-k^2)$$

Και η (8) γίνεται:

$$K_1-K_2=\frac{1}{2}m\frac{V_o^2}{2}(1-k^2)=\frac{1}{4}mV_o^2(1-k^2)$$

Έτσι, το ποσοστό επί τοις εκατό της κινητικής ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση θα δίνεται από τον τύπο:

$$100\frac{K_1-K_2}{K_1}\%=100\frac{\frac{1}{4}mV_o^2(1-k^2)}{\frac{1}{2}mV_o^2}\%=100\frac{1}{2}(1-k^2)\%=50(1-k^2)\%$$

Στο πείραμα που πραγματοποιήθηκε το k υπολογίστηκε 0,9840 επομένως το ποσοστό τοις εκατό της κινητικής ενέργειας που χάνεται είναι:
$50(1-0{,}9840^2)\%=1{,}587\%$

Υπολογισμός του χρόνου κρούσης και της δύναμης που αναπτύσσεται

Οι σφαίρες που συγκρούονται λειτουργούν σαν διακόπτης σε χρονοκύκλωμα. Ο χρόνος κρούσης υπολογίζεται από το δυναμικό του πυκνωτή (το οποίο μετράμε με ψηφιακό πολύμετρο) μετά από μια κρούση. Αφήνουμε τη σφαίρα β να συγκρουστεί με την ακίνητη σφαίρα α από διάφορες αποστάσεις. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων και οι υπολογισμοί εκτίθενται στον πίνακα 3. Στην τέταρτη στήλη του πίνακα έχει υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας β πριν την κρούση με τη σφαίρα α από την εξίσωση (3), στην πέμπτη στήλη του πίνακα, με τη βοήθεια της εξίσωσης (4) έχει υπολογιστεί ο χρόνος της κρούσης (σε μsec), και στην (6) στήλη του πίνακα η δύναμη πού αναπτύσσεται ανάμεσα στις σφαίρες κατά την κρούση, από την εξίσωση (5). Επίσης έχει μετρηθεί η τάση της ηλεκτρικής πηγής, η αντίσταση του κυκλώματος, η χωρητικότητα του πυκνωτή και η μάζα της σφαίρας. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δίνονται στη σελίδα 1.

Επειδή η μάζα της σφαίρας δεν μεταβάλλεται, η σχέση (5) γράφεται:

$$F=\frac{m\Delta v}{\Delta t}=\frac{m(V_o-\upsilon_\beta)}{\Delta t}=\frac{m(V_o-\frac{V_o}{2}(1-k))}{\Delta t} \qquad (9)$$

Όπου Δt η διάρκεια της κρούσης.

Στο συγκεκριμένο πείραμα έχουμε k=0,9840. Στην περίπτωση που η απόσταση από την οποία αφήνεται η σφαίρα β είναι S_β=17,6cm είναι V_o=0,718m/sec Δt=128μsec και $\upsilon_\beta=\frac{V_o}{2}(1-k)=\frac{0{,}718\text{m/sec}}{2}(1-0{,}9840)=0{,}006\text{m/sec}$ άρα η (9) γίνεται:

$$F_1=0{,}268\frac{(0{,}718-0{,}006)}{128}10^6\text{N}=149\cdot10\text{N}$$

Αν ήταν k=1, δηλαδή αν η κρούση ήταν απολύτως ελαστική, η ταχύτητα της σφαίρας β μετά την κρούση θα ήταν:

$$\upsilon_\beta=\frac{V_o}{2}(1-k)=\upsilon_\beta=\frac{V_o}{2}(1-1)=0$$

και η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των σφαιρών δίνεται από την εξίσωση (9) για k=1:

$$F_2=\frac{mV_o}{\Delta t}=\frac{0{,}268\cdot0{,}718}{128}\cdot10^6=150\cdot10\text{N}$$

Στην περίπτωση αυτή η κινητική ενέργεια διατηρείται και οι σφαίρες ανταλλάσουν ταχύτητες. Η αρχικά ακίνητη σφαίρα α (λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής) μετά την κρούση θα κινείται με ταχύτητα V_o, ενώ η σφαίρα β θα σταματήσει να κινείται. Φαίνεται ότι η δύναμη που αναπτύσσεται κατά την κρούση γίνεται μέγιστη όταν η κρούση είναι απόλυτα ελαστική.

Η διαφορά των F_1 και F_2 είναι μικρή αφού στην περίπτωση της F_1 ο συντελεστής αποκατάστασης τείνει στο 1 και η κρούση είναι σχεδόν ελαστική.

Στην επόμενη σελίδα δίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας της σφαίρας β πριν από την κρούση και της διάρκειας της κρούσης από τις μετρήσεις και τους υπολογισμούς του πίνακα 3. Τα πειραματικά σημεία φαίνεται ότι σχηματίζουν μια παραβολή και για $V_o\to0$ είναι $t_o\to\infty$