Διάδοση Κυμάτων στα Υλικά

Δ. Ευταξιόπουλος

14 Φεβρουαρίου 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διάδοση κυμάτων σε ελαστικό μέσο άπειρων διαστάσεων

1.1 Τάσεις και παραμορφώσεις

Οι τάσεις που ασκούνται σε μια επιφάνεια ενός στερεού σώματος, έχουν γενικά εφαπτομενικά και κάθετα προς την επιφάνεια, στοιχεία. Έστω ένα σώμα στον τρισδιάστατο χώρο που αναφέρεται στο Καρτεσιανό σύστημα $O(x, y, z)$. Θεωρούμε τρία επίπεδα, κάθετα προς τους άξονες Ox, Oy και Oz αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο P του σώματος. Γενικά υπάρχουν εννέα στοιχεία της τάσης που ασκούνται στα επίπεδα αυτά και συμβολίζονται με σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{zx}, σ_{yx}, σ_{zy} και σ_{xz}. Ο πρώτος δείκτης στα σύμβολα των τάσεων αναφέρεται στο επίπεδο όπου η τάση ασκείται και ο δεύτερος δείκτης αναφέρεται στη διεύθυνση της τάσης. Θεωρώντας ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο απειροστών διαστάσεων $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ και $\mathrm{d}z$ με μια κορυφή του να συμπίπτει με το σημείο P (Σχήμα 1.1) και απαιτώντας την ισορροπία των ροπών, μπορούμε να δείξουμε ότι

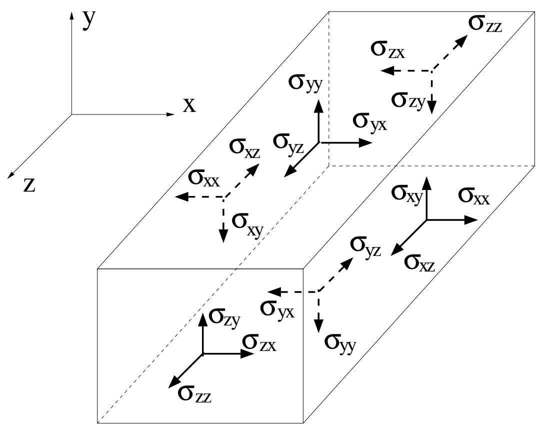
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} \tag{1.2}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} \tag{1.3}$$

Εξ αιτίας των σχέσεων (1.1) - (1.3) απομένουν έξι ανεξάρτητα στοιχεία της τάσης. Από τα έξι αυτά στοιχεία μπορούν να βρεθούν οι τάσεις σε οποιοδήποτε άλλο επίπεδο περνά από το σημείο P και έτσι ορίζεται πλήρως η εντατική κατάσταση στο P.

Αν τα στοιχεία της μετατόπισης στο σημείο P είναι $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ και $w(x, y, z)$ κατά μήκος των αξόνων x, y και z αντίστοιχα, τότε τα εννέα ανεξάρ-



Σχήμα 1.1: Τα στοιχεία της τάσης που ασκούνται σ' ένα παραλληλεπίπεδο απειροστών διαστάσεων.

τητα στοιχεία της βαθμίδας της μετατόπισης, είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial z} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.6}$$

Εναλλακτικά οι παραπάνω ποσότητες μπορούν να αναδιαταχθούν και να γραφούν όπως παρακάτω

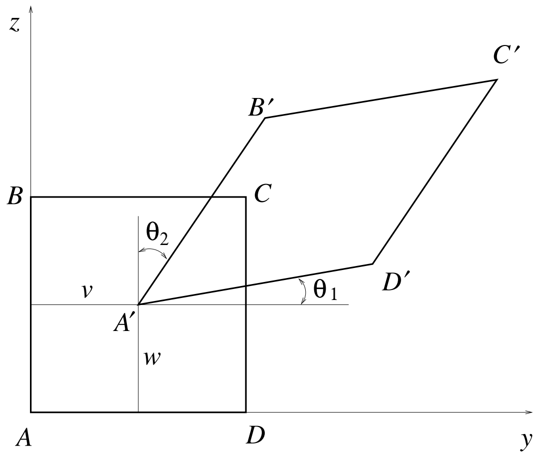
$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.7}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \epsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.8}$$

$$2\overline{\omega}_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad 2\overline{\omega}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad 2\overline{\omega}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.9}$$

Οι ορθές παραμορφώσεις, ϵ_{xx}, ϵ_{yy} και ϵ_{zz} αντιστοιχούν σε ανηγμένες επιμηκύνσεις και βραχύνσεις, ευθύγραμμων τμημάτων απειροστού μήκους, που περνούν από το σημείο P και είναι παράλληλα προς τους άξονες x, y και z. Οι διατμητικές παραμορφώσεις ϵ_{xy}, ϵ_{yz} και ϵ_{zx} αντιστοιχούν σε μεταβολές των ορθών γωνιών μεταξύ δύο κάθετων μεταξύ τους ευθυγράμμων τμημάτων απειροστού μήκους, που περνούν από το P και είναι παράλληλα προς τους άξονες που φανερώνουν οι δείκτες των στοιχείων αυτών.

Οι τρεις στροφές $\overline{\omega}_x$,$\overline{\omega}_y$ και $\overline{\omega}_z$ δε σχετίζονται με κάποια παραμόρφωση ενός στοιχείου του υλικού γύρω από το P αλλά, εκφράζουν τη στροφή του ως στερεό σώμα. Η σημασία αυτών των ποσοτήτων για μια παραμορφωσιακή κατάσταση στο επίπεδο, φαίνεται στο Σχήμα 1.2. Το $ABCD$ είναι ένα τετράγωνο απειροστών



Σχήμα 1.2: Διάτμηση και στροφή σε δύο διαστάσεις.

διαστάσεων που έχει μετατοπιστεί και παραμορφωθεί στο ρόμβο $A'B'C'D'$. θ_1 και θ_2 είναι οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές $A'D'$ και $A'B'$ με τους άξονες y και z αντίστοιχα. Ισχύει ότι

$$\tan\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{1.10}$$

και για μικρές παραμορφώσεις οι γωνίες μπορούν να θεωρηθούν ίσες με τις εφαπτόμενές τους. Έτσι, εξ αιτίας των (1.8) και (1.10) παίρνουμε τη σχέση

$$\epsilon_{yz} = \theta_1 + \theta_2 \tag{1.11}$$

για τη διατμητική παραμόρφωση. Φαίνεται από το Σχήμα 1.2 ότι η ποσότητα

$$\overline{\omega}_x = \theta_1 - \theta_2 \tag{1.12}$$

είναι ίση με το διπλάσιο της γωνίας που στρέφεται η διαγώνιος AC. Όταν οι τρεις στροφές στη σχέση (1.9) μηδενίζονται, τότε η παραμορφωσιακή κατάσταση είναι *αστρόβιλη (irrotational)* και χαρακτηρίζεται ως *καθαρή παραμόρφωση (pure strain)*.

1.2 Ο νόμος Hooke για ισότροπα υλικά

Για ισότροπα υλικά οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων είναι οι ακόλουθες

$$\sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{xx} \tag{1.13}$$
$$\sigma_{yy} = \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{yy} \tag{1.14}$$
$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{zz} \tag{1.15}$$
$$\sigma_{yz} = \mu\epsilon_{yz} \tag{1.16}$$
$$\sigma_{zx} = \mu\epsilon_{zx} \tag{1.17}$$
$$\sigma_{xy} = \mu\epsilon_{xy} \tag{1.18}$$

όπου λ και μ είναι οι σταθερές του Lamé. μ είναι το μέτρο διάτμησης και

$$\Delta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \tag{1.19}$$

είναι η *διασταλτικότητα* δηλαδή η αλλαγή του όγκου ενός κύβου του υλικού με μοναδιαίες διαστάσεις. Το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος του Poisson ν δίνονται σαν συνάρτηση των σταθερών του Lamé μέσα από τις σχέσεις

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{1.20}$$
$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{1.21}$$

Το μέτρο διόγκωσης k ορίζεται ως ο λόγος της εξωτερικά εφαρμοζόμενης υδροστατικής πίεσης p ως προς την ανηγμένη αλλαγή του όγκου Δ. Τότε

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = p \tag{1.22}$$
$$\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} = 0 \tag{1.23}$$

και από τις σχέσεις (1.13) - (1.18), προκύπτει ότι

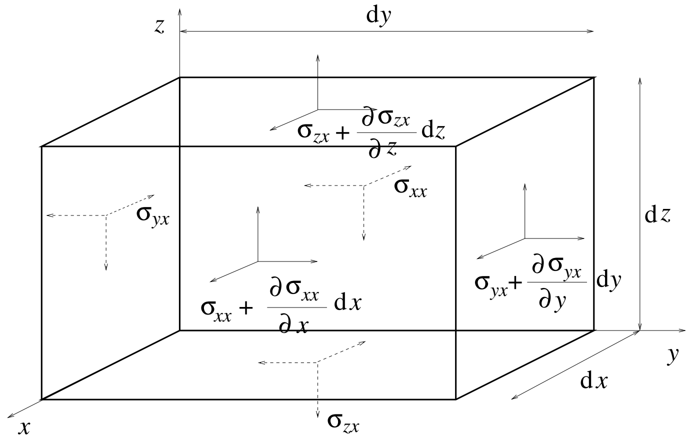
$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \frac{p}{3\lambda + 2\mu} \tag{1.24}$$

και εξ αιτίας της (1.19) προκύπτει ότι

$$k = \frac{p}{\Delta} = \lambda + \frac{2\mu}{3} \tag{1.25}$$

1.3 Εξισώσεις κίνησης σε ελαστικό μέσο

Για να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης για ένα ελαστικό μέσο, εξετάζουμε τη μεταβολή των τάσεων κατά μήκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου στοιχειωδών διαστάσεων $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ και $\mathrm{d}z$, που έχει ακμές παράλληλες προς τους άξονες του



Σχήμα 1.3: Τάσεις που ασκούνται στις έδρες ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

Καρτεσιανού συστήματος (Σχήμα 1.3). Οι τάσεις μεταβάλλονται συνεχώς μέσα στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και οι δυνάμεις στις έδρες του προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τις τάσεις με τα εμβαδά των επιφανειών όπου αυτές ασκούνται. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 1.3, έξι ξεχωριστές δυνάμεις θα ασκούνται παράλληλα προς κάθε άξονα. Εξετάζοντας τη συνισταμένη δύναμη παράλληλα προς τον άξονα x, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\\ \left(\sigma_{yx}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\sigma_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\\ \left(\sigma_{zx}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\sigma_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{1.26}$$

που τελικά δίνουν

$$\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.27}$$

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και αγνοώντας τις μαζικές δυνάμεις, γράφουμε την αδρανειακή δύναμη που ασκείται στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κατά τη διεύθυνση x, ως

$$\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.28}$$

Εξισώνοντας τις εκφράσεις (1.27) και (1.28), παίρνουμε την εξίσωση κίνησης κατά τη διεύθυνση x, ως

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.29}$$

Αντίστοιχα παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης κατά τις διευθύνσεις y και z ως

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.30}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.31}$$

Οι εξισώσεις (1.29) - (1.31) ισχύουν ανεξάρτητα από τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού. Για να επιλυθούν αυτές για ένα γραμμικά ελαστικό και ισότροπο υλικό, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων. Οι τελευταίες δίνονται από τις σχέσεις (1.13) - (1.18) και πρέπει να εισαχθούν στις (1.29) - (1.31). Η εξίσωση κίνησης κατά x τότε γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{xx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \epsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu \epsilon_{xz}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.32}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις σχέσεις παραμορφώσεων - μετατοπίσεων (1.7) και (1.8), η (1.32) δίνει

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.33}$$

όπου

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.34}$$

είναι ο τελεστής Laplace σε τρεις διαστάσεις. Όμοια, οι εξισώσεις κίνησης κατά τις διευθύνσεις y και z (1.30) και (1.31), παίρνουν τη μορφή

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.35}$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.36}$$

Οι (1.33), (1.35) και (1.36) είναι οι εξισώσεις κίνησης για ένα ισότροπο, γραμμικά ελαστικό μέσο, στο οποίο δεν ασκούνται μαζικές δυνάμεις. Θα φανεί στη συνέχεια ότι αυτές οι εξισώσεις εκφράζουν τη διάδοση δύο διαφορετικών τύπων κυμάτων στο ελαστικό μέσο.

Έτσι, αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.33) ως προς x, τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.35) ως προς y και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.36) ως προς z και προσθέσουμε κατά μέλη, τελικά παίρνουμε

$$\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 \Delta \tag{1.37}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = c_1^2 \nabla^2 \Delta \tag{1.38}$$

όπου

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{1.39}$$

Η σχέση (1.38) παριστάνει μια *εξίσωση κύματος*. Ειδικότερα εκφράζει τη διάδοση της διασταλτικότητας Δ μέσα στο ελαστικό μέσο, με ταχύτητα c_1 που δίνεται από τη σχέση (1.39).

Αντίθετα, αν απαλείψουμε τη διασταλτικότητα Δ από τις σχέσεις (1.35) και (1.36), παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1.35) ως προς z και τα δύο μέλη της (1.36) ως προς y και αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{1.40}$$

ή εναλλακτικά

$$\rho \frac{\partial^2 \overline{\omega}_x}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \overline{\omega}_x \tag{1.41}$$

όπου $\overline{\omega}_x$ είναι η στροφή γύρω από τον άξονα x, που δίνεται από την εξίσωση (1.9). Η εξίσωση (1.41) δείχνει ότι η στροφή διαδίδεται με ταχύτητα

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.42}$$

στο ελαστικό μέσο. Ανάλογες σχέσεις προκύπτουν και για τις στροφές $\overline{\omega}_y$ και $\overline{\omega}_z$.

Αν η διασταλτικότητα

$$\Delta = 0 \tag{1.43}$$

τότε οι εξισώσεις κίνησης (1.33), (1.35) και (1.36) γίνονται

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u \tag{1.44}$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 v \tag{1.45}$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 w. \tag{1.46}$$

Για να είναι τα στοιχεία των στροφών $\overline{\omega}_x$, $\overline{\omega}_y$ και $\overline{\omega}_z$ μηδενικά, δηλαδή για να είναι το πεδίο των μετατοπίσεων αστρόβιλο, θα πρέπει οι μετατοπίσεις u, v και w να παράγονται από δυναμικό ϕ μέσα από τις σχέσεις

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1.47}$$

όπου ϕ είναι μια συνάρτηση δυναμικού. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\Delta = \nabla^2 \phi, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = \nabla^2 u \tag{1.48}$$

Εξ αιτίας των (1.48), η εξίσωση κίνησης (1.33) γίνεται

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.49}$$

ενώ με όμοιο τρόπο οι άλλες δύο εξισώσεις κίνησης (1.35) και (1.36) γράφονται ως

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.50}$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.51}$$

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι στο εσωτερικό ενός ελαστικού σώματος, τα κύματα διαδίδονται με δυο διαφορετικές ταχύτητες. Κύματα που δεν περιλαμβάνουν στροφή διαδίδονται με ταχύτητα

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{1.52}$$

ενώ τα κύματα που δεν περιλαμβάνουν διασταλτικότητα διαδίδονται με ταχύτητα

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.53}$$

Τα πρώτα θα μπορούσαν να ονομαστούν *αστρόβιλα (irrotational)* και τα δεύτερα *ισόχωρα (equivoluminal)*. Όμως οι καθιερωμένες ονομασίες τους είναι *διαμήκη* και *εγκάρσια* αντίστοιχα.

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι κάθε κύμα με επίπεδο μέτωπο (plane wave) που διαδίδεται μέσα σ' ένα ισότροπο ελαστικό μέσο, πρέπει να ταξιδεύει με μια από τις δύο παραπάνω ταχύτητες, όπως αυτές δίνονται από τις σχέσεις (1.52) και (1.53). Το επίπεδο μέτωπο σημαίνει ότι οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων είναι ίδιες μέσα σε επίπεδα κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης. Έτσι ας θεωρήσουμε ένα κύμα με επίπεδο μέτωπο που διαδίδεται παράλληλα προς τον θετικό άξονα x. Επειδή το ελαστικό μέσο θεωρείται ισότροπο, δεν υπάρχει απώλεια της γενικότητας θεωρώντας και τέτοιο. Έστω ακόμη ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος αυτού είναι c. Τότε οι μετατοπίσεις u, v και w θα είναι συναρτήσεις της παραμέτρου

$$\psi = x - ct. \tag{1.54}$$

Έτσι θα γράφουμε

$$u = u(\psi) \tag{1.55}$$

$$v = v(\psi) \tag{1.56}$$

$$w = w(\psi) \tag{1.57}$$

και θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \tag{1.58}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \tag{1.59}$$

ενώ οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι ως προς y και z είναι όλες ίσες με μηδέν. Αν συμβολίσουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους των μετατοπίσεων u, v και w ως προς ψ με u'', v'' και w'' αντίστοιχα και αντικαταστήσουμε στην πρώτη εξίσωση κίνησης (1.33), λαμβάνοντας υπ' όψη τις (1.58) και (1.59), παίρνουμε

$$\rho c^2 u'' = (\lambda + 2\mu) u'' \tag{1.60}$$

ενώ αντίστοιχα από τις άλλες δύο εξισώσεις κίνησης κατά τις διευθύνσεις y και z παίρνουμε

$$\rho c^2 v'' = \mu v'' \tag{1.61}$$

$$\rho c^2 w'' = \mu w'' \tag{1.62}$$

Οι εξισώσεις (1.60) - (1.62) μπορούν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα είτε αν

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \qquad v'' = 0, \qquad w'' = 0 \tag{1.63}$$

είτε αν

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}, \qquad u'' = 0 \tag{1.64}$$

Στην πρώτη περίπτωση (σχέσεις (1.63)) έχουμε διαμήκες κύμα με τη διεύθυνση της διαταραχής των υλικών σημείων να είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Στη δεύτερη περίπτωση (σχέσεις (1.64)) έχουμε εγκάρσιο κύμα με τη διεύθυνση διαταραχής των υλικών σημείων να είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα ρ και από το μέτρο διάτμησης μ του ελαστικού μέσου, όπως φαίνεται από τη σχέση (1.64). Αντίστοιχα, θα σκεφτόμασταν ότι η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων, εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα ρ και από το μέτρο διόγκωσης k. Όμως, από τη σχέση (1.25) έχουμε ότι

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{1.65}$$

και κατά συνέπεια η σχέση (1.52) δίνει

$$c_1 = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \tag{1.66}$$

Επομένως όχι μόνο το μέτρο διόγκωσης k αλλά και το μέτρο διάτμησης μ εμπλέκονται στην ταχύτητα διάδοσης του διαμήκους κύματος. Η αιτία γι αυτό είναι ότι κατά τη διάδοση ενός διαμήκους κύματος, ένας στοιχειώδης κύβος στο ελαστικό μέσο δεν υποβάλλεται μόνο σε θλίψη και εφελκυσμό αλλά και σε διάτμηση, διότι το σχήμα του αλλάζει.

1.4 Ολοκλήρωση της εξίσωσης κύματος

Οι εξισώσεις (1.37), (1.41) και (1.44) έχουν όλες την μορφή

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \alpha \tag{1.67}$$

και όταν η παραμόρφωση είναι συνάρτηση μιας μόνο συντεταγμένης, π. χ. της x, τότε η (1.67) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \tag{1.68}$$

Η γενική λύση της (1.68) είναι

$$\alpha = f(x - ct) + F(x + ct) \tag{1.69}$$

όπου f και F είναι αυθαίρετες συναρτήσεις που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Η f αντιστοιχεί σ' ένα κύμα με επίπεδο μέτωπο που ταξιδεύει κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα x και η F σ' ένα κύμα με επίπεδο μέτωπο που ταξιδεύει κατά τη διεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα x, δηλαδή αντίθετα από το προηγούμενο. Έστω μια διαταραχή που κινείται κατά τη θετική φορά του άξονα x και για χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = x_0$ και έχει τιμή $f(x_0)$. Σε μεταγενέστερο χρόνο $t = t_1$, η διαταραχή θα έχει μετακινηθεί στη θέση $x = x_0 + ct_1$ και το μέγεθός της θα είναι $f(x_0 + ct_1 - ct_1) = f(x_0)$. Επομένως η διαταραχή διαδίδεται με σχήμα αμετάβλητο.

Όταν η διαταραχή διαδίδεται ακτινικά από ένα σημείο, η παραμόρφωση θα εξαρτάται μόνο από το μέτρο r της ακτίνας, από το σημείο εκκίνησης. Επειδή

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.70}$$

έχουμε για την ακτινική διάδοση της διαταραχής τις εξισώσεις κίνησης

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial r} \tag{1.71}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial r} \tag{1.72}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{r^2 - z^2}{r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial r} \tag{1.73}$$

Έτσι η εξίσωση (1.67) γίνεται

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \tag{1.74}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial r^2} \tag{1.75}$$

που είναι της ίδιας μορφής με την (1.68). Η λύση της (1.75) έχει τη μορφή

$$r\alpha = f(r - ct) + F(r + ct) \tag{1.76}$$

όπου η $f(r - ct)$ αντιστοιχεί σ' ένα σφαιρικό κύμα που απομακρύνεται από την αρχή και η $F(r + ct)$ αντιστοιχεί σ' ένα σφαιρικό κύμα που πλησιάζει προς την αρχή. Το μέγεθος της διαταραχής είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης r από την αρχή.

1.5 Τα κύματα Rayleigh

Σ' ένα ισότροπο ελαστικό μέσο άπειρων διαστάσεων, μόνο δύο τύποι μαζικών κυμάτων μπορούν να διαδοθούν. Όταν όμως υπάρχει ένα σύνορο, μπορεί να δημιουργηθούν και *επιφανειακά κύματα*. Αυτά τα κύματα διερευνήθηκαν πρώτα από τον Lord Rayleigh (1887), που έδειξε ότι η επιρροή τους μειώνεται απότομα με το βάθος και ότι η ταχύτητα διάδοσής τους είναι μικρότερη από την αντίστοιχη των μαζικών κυμάτων (διαμήκων και εγκαρσίων).

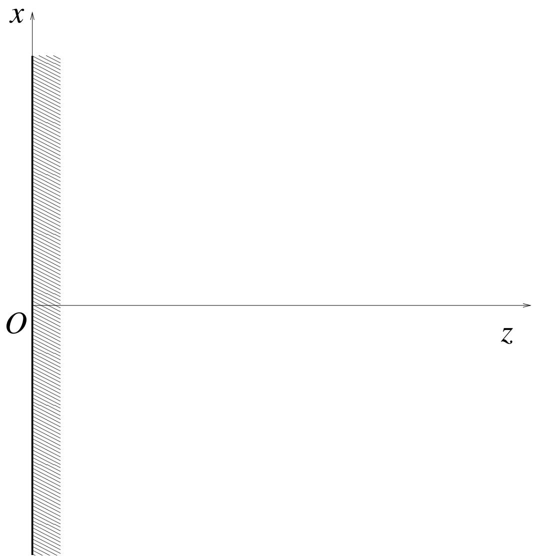
Θα εξετάσουμε τη διάδοση κυμάτων με επίπεδο μέτωπο, σ' ένα ελαστικό μέσο με επίπεδο σύνορο και θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύσεις των εξισώσεων κίνησης (1.33), (1.35) και (1.36) που να αντιστοιχούν σε διαταραχές οι οποίες περιορίζονται στη γειτονιά του συνόρου και ικανοποιούν τη συνθήκη για αφόρτιστο σύνορο (stress free boundary). Θεωρούμε ότι το επίπεδο σύνορο συμπίπτει με το επίπεδο xy και ότι ο θετικός ημιάξονας z κατευθύνεται προς το εσωτερικό τού σώματος. Θεωρούμε ότι το κύμα με επίπεδο μέτωπο ταξιδεύει κατά τη διεύθυνση x (Σχήμα 1.4). Επειδή οι μετατοπίσεις θα είναι ανεξάρτητες του y, μπορούμε να εισαγάγουμε δυο συναρτήσεις δυναμικού $\phi(x, z)$ και $\psi(x, z)$, τέτοιες ώστε:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{1.77}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.78}$$

Έτσι η διασταλτικότητα Δ, εξ αιτίας των (1.77) - (1.78), γράφεται ως

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla^2 \phi \tag{1.79}$$



Σχήμα 1.4: Ημίχωρος με ελεύθερη επιφάνεια στη θέση $z = 0$.

ενώ η στροφή $\overline{\omega}_y$ στο επίπεδο xz δίνεται από τη σχέση

$$2\overline{\omega}_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \nabla^2 \psi \tag{1.80}$$

Οι εξισώσεις (1.79) και (1.80) δείχνουν ότι η συνάρτηση ϕ συνδέεται με τη διασταλτικότητα που δημιουργείται από τη διαταραχή, ενώ η συνάρτηση ψ συνδέεται με τη στροφή. Επομένως η εισαγωγή των δύο παραπάνω συναρτήσεων δυναμικού μας δίνει τη δυνατότητα να διαχωρίσουμε την επίδραση της διασταλτικότητας και της στροφής στο ελαστικό μέσο.

Οι εξισώσεις κίνησης (1.33), (1.35) και (1.36) γράφονται ως

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \tag{1.81}$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \tag{1.82}$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w \tag{1.83}$$

Αν οι μετατοπίσεις είναι ανεξάρτητες από το y, οι (1.81) και (1.83) γράφονται, αν ληφθούν υπ' όψη οι (1.77) και (1.78), ως

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + \mu \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi) \tag{1.84}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - \mu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) \tag{1.85}$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις θα ικανοποιούνται αν

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \phi = c_1^2 \nabla^2 \phi \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \psi = c_2^2 \nabla^2 \psi \tag{1.87}$$

Έστω τώρα ένα ημιτονοειδές κύμα με συχνότητα f όπου

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}, \tag{1.88}$$

ω είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος και T είναι η περίοδός του. Οι δύο τελευταίες συνδέονται μέσα από τη σχέση

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.89}$$

Το κύμα διαδίδεται κατά τη διεύθυνση του άξονα των x με ταχύτητα c όπου

$$c = \frac{L}{T} \tag{1.90}$$

L είναι το μήκος κύματος που δίνεται από τη σχέση

$$L = \frac{2\pi}{k} \tag{1.91}$$

όπου k είναι ο κυματικός αριθμός. Επίσης

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{1.92}$$

Μπορούμε τώρα να δοκιμάσουμε ως λύσεις των (1.86) και (1.87), τις συναρτήσεις

$$\phi = F(z) e^{i(\omega t - kx)} \tag{1.93}$$

$$\psi = G(z) e^{i(\omega t - kx)} \tag{1.94}$$

όπου

$$i = \sqrt{-1} \tag{1.95}$$

και F και G είναι συναρτήσεις που καθορίζουν τον τρόπο κατά τον οποίο αλλάζει το εύρος των κυμάτων, ως προς την απόσταση z από την ελεύθερη επιφάνεια. Αντικαθιστώντας την έκφραση για τη ϕ από την (1.93) στην εξίσωση (1.86), παίρνουμε

$$-\frac{\omega^2}{c_1^2} F(z) = -k^2 F(z) + F''(z) \tag{1.96}$$

όπου

$$F''(z) = \frac{\mathrm{d}^2 F(z)}{\mathrm{d}z^2} \tag{1.97}$$

Η (1.96) γράφεται και ως

$$F''(z) - (k^2 - h^2)F(z) = 0 \tag{1.98}$$

όπου

$$h = \frac{\omega}{c_1}. \tag{1.99}$$

Η γενική λύση της (1.98) είναι

$$F(z) = Ae^{-qz} + A'e^{qz} \tag{1.100}$$

όπου

$$q^2 = k^2 - h^2 \tag{1.101}$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (1.100) αντιστοιχεί σε μια διαταραχή που αυξάνεται το εύρος της με την αύξηση της απόστασης από την ελεύθερη επιφάνεια. Επειδή αναζητάμε λύσεις για μειούμενο εύρος διαταραχής με την απομάκρυνση από την ελεύθερη επιφάνεια, θέτουμε

$$A' = 0 \tag{1.102}$$

Όμοια αν αντικαταστήσουμε την έκφραση της ψ από τη σχέση (1.94) στην εξίσωση (1.87), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$-\kappa^2 G(z) = k^2 G(z) + G''(z) \tag{1.103}$$

όπου

$$\kappa = \frac{\omega}{c_2}. \tag{1.104}$$

Η εξίσωση (1.103) έχει ως λύση την

$$G(z) = Be^{-sz} \tag{1.105}$$

όπου

$$s^2 = k^2 - \kappa^2. \tag{1.106}$$

Έτσι οι εξισώσεις (1.93) και (1.94) γίνονται

$$\phi = Ae^{-qz+i(\omega t - kx)} \tag{1.107}$$

$$\psi = Be^{-sz+i(\omega t - kx)} \tag{1.108}$$

Εισάγουμε τώρα τις παραπάνω εκφράσεις για τις λύσεις ϕ και ψ στις συνοριακές συνθήκες μηδενισμού των τάσεων στην ελεύθερη επιφάνεια. Οι συνθήκες αυτές είναι

$$\sigma_{zz} = 0 \tag{1.109}$$

$$\sigma_{zy} = 0 \tag{1.110}$$

$$\sigma_{zx} = 0 \tag{1.111}$$

για $z = 0$. Θυμίζουμε ότι η ορθή τάση σ_{zz} δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.112}$$

Εδώ, εξ αιτίας των (1.78) και (1.79), η (1.112) γράφεται ως

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial\partial z}. \tag{1.113}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τις συναρτήσεις ϕ και ψ από τις σχέσεις (1.107) και (1.108), στη σχέση (1.113) και θέτοντας $z = 0$, βρίσκουμε από την (1.109)

$$A\left[(\lambda + 2\mu)\,q^2 - \lambda k^2\right] - 2B\mu isk = 0. \tag{1.114}$$

Όμοια από τη συνοριακή συνθήκη (1.111) και επειδή

$$\sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1.115}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\sigma_{zx} = \mu\left(2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right). \tag{1.116}$$

Θέτοντας στην (1.116) τις εκφράσεις στα δεξιά μέλη των (1.107) και (1.108), παίρνουμε για $z = 0$

$$2iqkA + (s^2 + k^2)B = 0. \tag{1.117}$$

Απαλείφοντας το λόγο $\dfrac{A}{B}$ από τις (1.114) και (1.117) βρίσκουμε

$$4\mu qsk^2 = \left[(\lambda + 2\mu)q^2 - \lambda k^2\right](s^2 + k^2). \tag{1.118}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της (1.118) και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα q και s από τις (1.101) και (1.106), γράφουμε

$$16\mu^2(k^2 - h^2)(k^2 - \kappa^2)k^2 = [-(\lambda + 2\mu)h^2 + 2\mu k^2]^2(2k^2 - \kappa^2)^2. \tag{1.119}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με $\mu^2 k^2$ βρίσκουμε

$$16\left(1-\frac{h^2}{k^2}\right)\left(1-\frac{\kappa^2}{k^2}\right)=\left[2-(\lambda+2\mu)\,\mu^{-1}\frac{h^2}{k^2}\right]^2\left(2-\frac{\kappa^2}{k^2}\right)^2. \tag{1.120}$$

Επειδή όμως

$$h=\frac{\omega}{c_1},\qquad \kappa=\frac{\omega}{c_2} \tag{1.121}$$

ισχύει ότι

$$\frac{h^2}{\kappa^2}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}=\frac{1-2\nu}{2-2\nu}=\alpha_1^2 \tag{1.122}$$

και επομένως

$$h=\alpha_1\kappa. \tag{1.123}$$

Εξ αιτίας των σχέσεων (1.122) και (1.123), η σχέση (1.120) γράφεται ως

$$16\left(1-\alpha_1^2\frac{\kappa^2}{k^2}\right)\left(1-\frac{\kappa^2}{k^2}\right)=\left(2-\frac{\kappa^2}{k^2}\right)^4. \tag{1.124}$$

ή ισοδύναμα ως

$$\kappa_1^6-8\kappa_1^4+(24-16\alpha_1^2)\kappa_1^2+16(\alpha_1^2-1)=0 \tag{1.125}$$

όπου

$$\kappa_1=\frac{\kappa}{k}. \tag{1.126}$$

Η (1.125) είναι μια τριτοβάθμια εξίσωση ως προς το κ_1^2 και αν είναι γνωστή η τιμή του ν για το ελαστικό μέσο, το κ_1 μπορεί να βρεθεί με αριθμητικές μεθόδους. Τώρα, επειδή

$$\kappa_1=\frac{\kappa}{k}=\frac{\omega}{kc_2}=\frac{c}{c_2} \tag{1.127}$$

όπου

$$c=\frac{\omega}{k} \tag{1.128}$$

είναι η ταχύτητα διάδοσης του επιφανειακού κύματος. Επομένως το κ_1 δίνει το λόγο ανάμεσα στην ταχύτητα διάδοσης του επιφανειακού κύματος και στην ταχύτητα διάδοσης του εγκαρσίου κύματος. Η ταχύτητα διάδοσης του επιφανειακού κύματος c είναι επομένως ανεξάρτητη από την κυκλική συχνότητα ω και εξαρτάται μόνο από τις ελαστικές σταθερές του υλικού. Επομένως δεν υπάρχει διασπορά των επιφανειακών κυμάτων και ένα τέτοιο κύμα θα διαδίδεται με σταθερή κυματομορφή, δηλαδή αναλλοίωτο όσον αφορά το σχήμα του κυματισμού.

Ο ρυθμός με τον οποίο απομειώνονται τα επιφανειακά κύματα ως προς το βάθος z, εξαρτάται από τους συντελεστές εξασθένισης q και s. Από τις εξισώσεις (1.101) και (1.106) παίρνουμε

$$\frac{q^2}{k^2} = 1 - \alpha_1^2 \kappa_1^2 \tag{1.129}$$

$$\frac{s^2}{k^2} = 1 - \kappa_1^2 \tag{1.130}$$

δηλαδή οι τιμές των $\dfrac{q}{k}$ και $\dfrac{s}{k}$ μπορούν βρεθούν γνωρίζοντας την τιμή του κ_1. Από τις εξισώσεις (1.77), (1.78), (1.107) και (1.108) βρίσκουμε

$$u = -(Aike^{-qz} + Bse^{-sz})e^{i(\omega t - kx)} \tag{1.131}$$

$$w = -(Aqe^{-qz} - Bike^{-sz})e^{i(\omega t - kx)} \tag{1.132}$$

Αν τώρα στις (1.131) και (1.132) θέσουμε την τιμή του B ως προς το A, που βρίσκουμε από τη σχέση (1.114), παίρνουμε τις εκφράσεις

$$u = Ak\left[e^{-qz} - \frac{2qse^{-sz}}{s^2+k^2}\right]\sin(\omega t - kx) \tag{1.133}$$

$$w = Aq\left[e^{-qz} - \frac{2k^2e^{-sz}}{s^2+k^2}\right]\cos(\omega t - kx). \tag{1.134}$$

Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ότι $\nu = 0.25$ τότε από τη σχέση (1.122) βρίσκουμε ότι $\alpha_1^2 = \dfrac{1}{3}$ και η εξίσωση (1.125) γίνεται

$$(\kappa_1^2 - 4)(3\kappa_1^4 - 12\kappa_1^2 + 8) = 0 \tag{1.135}$$

που έχει τις ρίζες

$$\kappa_1^2 = 4, \qquad \kappa_1^2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \kappa_1^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{1.136}$$

Οι σχέσεις (1.129) και (1.130) δείχνουν ότι οι πρώτες δύο τιμές του κ_1^2 στην (1.136) οδηγούν σε φανταστικές τιμές των $\dfrac{q}{k}$ και $\dfrac{s}{k}$ και γι' αυτό δεν αντιστοιχούν σε κύματα του τύπου που εξετάζουμε. Η τρίτη τιμή δίνει $\kappa_1 = 0.9194$ που σημαίνει ότι τα επιφανειακά κύματα ταξιδεύουν με ταχύτητα

$$c = \kappa_1 c_2 = 0.9194 c_2 \tag{1.137}$$

που αντιστοιχεί σ' ένα ποσοστό της ταχύτητας των εγκαρσίων κυμάτων, όταν $\nu = 0.25$.

Εισάγοντας την τιμή του κ_1 στις (1.129) και (1.130) παίρνουμε

$$\frac{q}{k} = 0.8475 \tag{1.138}$$

$$\frac{s}{k} = 0.3933 \tag{1.139}$$

Από τη σχέση (1.133), ο ρυθμός με τον οποίο το εύρος της μετατόπισης u κατά τη διεύθυνση της διάδοσης του επιφανειακού κύματος απομειώνεται είναι

$$e^{-qz} - \frac{2qse^{-sz}}{s^2 + k^2}. \tag{1.140}$$

Θέτοντας τις τιμές των $\frac{q}{k}$ και $\frac{s}{k}$ από τις (1.138) και (1.139) στην παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$e^{-0.8475kz} - 0.5773e^{-0.3933kz}. \tag{1.141}$$

Η τελευταία έκφραση δίνει απότομα μειούμενες τιμές για αυξανόμενες τιμές του kz και μηδενίζεται για $kz = 1.210$. Γι' αυτή την τιμή του kz η μετατόπιση u μηδενίζεται για όλες τις τιμές των x και t. Υπάρχει επομένως ένα επίπεδο σε βάθος $z = \frac{1.21}{k}$ όπου δεν υπάρχει κίνηση των υλικών σημείων παράλληλα προς την ελεύθερη επιφάνεια. Αν L είναι το μήκος του επιφανειακού κύματος, τότε $z = 0.193L$ διότι $k = \frac{2\pi}{L}$. Για μεγαλύτερα βάθη, το εύρος αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή έχοντας όμως αντίθετο πρόσημο. Έτσι οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων γίνονται με αντίθετη φάση.

Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το εύρος της ταλάντωσης κάθετα προς την ελεύθερη επιφάνεια, ως προς το βάθος z, φαίνεται από τη σχέση (1.134) να εξαρτάται από τον παράγοντα

$$e^{-qz} - \frac{2k^2e^{-sz}}{s^2 + k^2}. \tag{1.142}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές στην παραπάνω έκφραση παίρνουμε

$$e^{-0.8475fz} - 1.7321e^{-0.3933fz}. \tag{1.143}$$

Ο παράγοντας αυτός δεν αλλάζει πρόσημο όταν μεταβάλλεται το βάθος, επομένως δεν υπάρχει πεπερασμένο βάθος για το οποίο μηδενίζεται το εύρος της ταλάντωσης των υλικών σημείων κάθετα προς την ελεύθερη επιφάνεια. Όταν αυξάνεται το z το εύρος της ταλάντωσης πρώτα αυξάνεται, παίρνει μια μέγιστη τιμή για $z = 0.076L$ και μετά μειώνεται μονότονα. Σε βάθος ίσο με ένα μήκος κύματος, δηλαδή για $kz = 2\pi$, το εύρος της ταλάντωσης των υλικών σημείων κάθετα προς την ελεύθερη επιφάνεια έχει πέσει στο 0.019 της τιμής του στην ελεύθερη επιφάνεια.

Φαίνεται ότι το γινόμενο kz είναι η καθοριστική παράμετρος για την εξασθένιση του εύρους των ταλαντώσεων, τόσο παράλληλα όσο και κάθετα προς την ελεύθερη επιφάνεια. Επειδή ο κυματικός αριθμός k είναι ανάλογος της συχνότητας f, διότι

$$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{\omega T}{cT} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{c} f \tag{1.144}$$

τα κύματα Rayleigh με υψηλή συχνότητα θα εξασθενήσουν πιο έντονα με την αύξηση του βάθους από τα αντίστοιχα κύματα Rayleigh με χαμηλή συχνότητα.

Οι σχέσεις (1.133) και (1.134) για τις μετατοπίσεις u και w, δείχνουν ότι τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου κινούνται σε ελλειπτική τροχιά της οποίας ο μεγάλος άξονας είναι κάθετος στην ελεύθερη επιφάνεια. Για τα υλικά σημεία που βρίσκονται πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, ο λόγος των μηκών του μεγάλου και του μικρού ημιάξονα της έλλειψης είναι ίσος με 1.468.

Όλοι οι παραπάνω αριθμητικοί υπολογισμοί έχουν γίνει με την τιμή $\nu = 0.25$ για τον λόγο του Poisson. Παρόμοια όμως αποτελέσματα παίρνουμε αν χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική τιμή για το ν. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την ακραία τιμή για $\nu = 0.5$ που αναφέρεται σε ασυμπίεστο υλικό, οπότε λόγω της σχέσης (1.122) $\alpha_1 = 0$, η εξίσωση (1.125) γίνεται

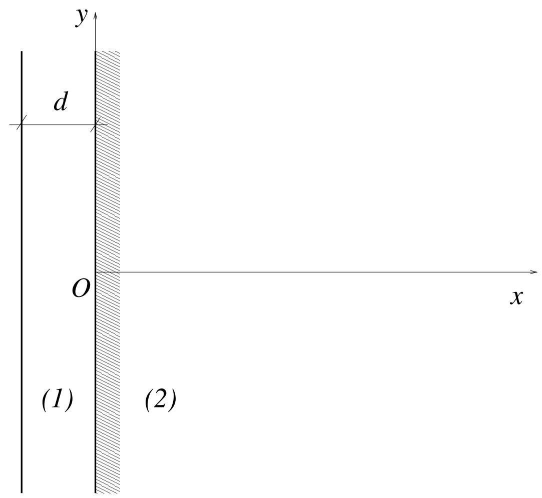
$$\kappa_1^6 - 8\kappa_1^4 + 24\kappa_1^2 - 16 = 0 \tag{1.145}$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μόνη πραγματική ρίζα την $\kappa_1^2 = 0.9127$ και επομένως τα επιφανειακά κύματα ταξιδεύουν με ταχύτητα $c = 0.9554c_2$, μικρότερη δηλαδή από την αντίστοιχη των εγκαρσίων κυμάτων. Αντικατάσταση της τιμής αυτής στη σχέση (1.133) δείχνει ότι μετατόπιση των υλικών σημείων παράλληλα προς την ελεύθερη επιφάνεια, γίνεται μηδενική σε βάθος $z = 0.138L$.

1.6 Τα κύματα Love

Μια σημαντική ώθηση για την ανάπτυξη της θεωρίας στη διάδοση των κυμάτων σε ελαστικά μέσα, έχει δοθεί από τις παρατηρήσεις στη σεισμολογία. Έτσι λοιπόν μια από τις πρώτες διαπιστώσεις των σεισμολόγων ήταν η ύπαρξη μεγάλων οριζοντίων μετατοπίσεων, δηλαδή μετατοπίσεων παράλληλων προς την ελεύθερη επιφάνεια της γης, κατά τη διάρκεια της κύριας δόνησης ενός σεισμού. Τέτοιες μετατοπίσεις καταγράφονταν από οριζόντια πολωμένα εγκάρσια κύματα (SH waves), κύματα δηλαδή πού η διεύθυνση διάδοσής τους είναι οριζόντια και οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων πραγματοποιούνται στο οριζόντιο επίπεδο, κάθετα όμως προς τη διεύθυνση διάδοσης. Όμως τέτοιες μετατοπίσεις δεν είναι χαρακτηριστικές των κυμάτων Rayleigh, που είναι κατακόρυφα πολωμένα, δηλαδή οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων πραγματοποιούνται στο κατακόρυφο επίπεδο. Παραπέρα, η κατακόρυφη μετατόπιση στα κύματα Rayleigh είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη οριζόντια. Το συμπέρασμα ήταν ότι οι επικρατούσες συνθήκες στη γη είναι διαφορετικές από αυτές ενός ισότροπου και ομογενούς ημίχωρου. Ο Love εκτίμησε ότι τέτοια κύματα ήταν αποτέλεσμα της ύπαρξης στρώσεων από διαφορετικά υλικά που υπάρχουν στη γη. Τα οριζόντια πολωμένα αυτά κύματα παγιδεύονται σε μια άνω στρώση και διαδίδονται μέσα από πολλαπλές ανακλάσεις μέσα στη στρώση. Τα βασικά στοιχεία αυτής της θεώρησης παρουσιάζονται παρακάτω.

Θεωρούμε έναν ημίχωρο αποτελούμενο από ισότροπο υλικό που συμβολίζεται με τον άνω δείκτη $^{(2)}$. Η συνοριακή επιφάνεια του ημιχώρου $x = 0$ συμπίπτει με το επίπεδο yz ενώ το ελαστικό μέσο καταλαμβάνει την περιοχή όπου $x > 0$ (Σχήμα 1.5). Το διάστημα $-d < x < 0$ καταλαμβάνεται από στρώση διαφορετικού υλικού



Σχήμα 1.5: Ημίχωρος με επιφανειακή στρώση υλικού.

που συμβολίζεται με τον άνω δείκτη $^{(1)}$. Αναζητάμε πεδία μετατοπίσεων με μη μηδενικά στοιχεία μόνο κατά τη διεύθυνση z, δηλαδή πεδία όπου

$$w^{(1)} = w^{(1)}(x, y, t), \qquad u^{(1)} = v^{(1)} = 0 \tag{1.146}$$

$$w^{(2)} = w^{(2)}(x, y, t), \qquad u^{(2)} = v^{(2)} = 0 \tag{1.147}$$

Οι διέπουσες εξισώσεις μπορούν να γραφούν με χρήση συναρτήσεων δυναμικού. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα όμως είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης (1.44) γραμμένες με χρήση των μετατοπίσεων μόνο. Οι εξισώσεις αυτές για τα δύο μέσα παίρνουν τη μορφή

$$\nabla^2 w^{(1)} = \frac{1}{{c_2^{(1)}}^2} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} \tag{1.148}$$

$$\nabla^2 w^{(2)} = \frac{1}{{c_2^{(2)}}^2} \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} \tag{1.149}$$

όπου ο τελεστής Laplace για δύο διαστάσεις παίρνει τη μορφή

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.150}$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{xz}^{(1)} = 0 \qquad \text{για} \qquad x = -d \tag{1.151}$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} \qquad \text{για} \qquad x = 0 \tag{1.152}$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} \qquad \text{για} \qquad x = 0 \tag{1.153}$$

Οι δύο τελευταίες συνθήκες (1.152) και (1.153) εκφράζουν την πλήρη συγκόλληση της στρώσης (1) στον ημίχωρο (2) με τη συνέχεια τάσεων και μετατοπίσεων στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$.

Για τις εξισώσεις (1.148) και (1.149) αναζητάμε λύσεις της μορφής

$$w^{(1)} = G^{(1)}(x)e^{ik(y-ct)} \tag{1.154}$$

$$w^{(2)} = G^{(2)}(x)e^{ik(y-ct)} \tag{1.155}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μετατοπίσεων από τις σχέσεις (1.154) και (1.155) στις εξισώσεις κίνησης (1.148) και (1.149), παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2 G^{(1)}(x)}{\mathrm{d}x^2} + {\beta^{(1)}}^2 G^{(1)}(x) = 0 \tag{1.156}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 G^{(2)}(x)}{\mathrm{d}x^2} - {\beta^{(2)}}^2 G^{(2)}(x) = 0 \tag{1.157}$$

όπου

$${\beta^{(1)}}^2 = k^2 \left(\frac{c^2}{{c_2^{(1)}}^2} - 1 \right) \tag{1.158}$$

$${\beta^{(2)}}^2 = k^2 \left(1 - \frac{c^2}{{c_2^{(2)}}^2} \right) \tag{1.159}$$

Οι λύσεις που προκύπτουν από τις (1.154) και (1.155) λόγω των (1.156) και (1.157), είναι τελικά

$$w^{(1)} = A_1 e^{i(ky - \beta^{(1)}x - \omega t)} + A_2 e^{i(ky + \beta^{(2)}x - \omega t)} \tag{1.160}$$

$$w^{(2)} = B_1 e^{-\beta^{(2)}x} e^{i(ky - \omega t)} \tag{1.161}$$

Η λύση (1.160) αφορά κύματα με επίπεδο μέτωπο που διαδίδονται μέσα στη λωρίδα (1). Η λύση (1.161) αφορά κύματα που διατηρούν την ενέργειά τους κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$ ενώ απομειώνονται με την απομάκρυνση από αυτή.

Αντικαθιστούμε τώρα τις λύσεις (1.160) και (1.161) στις συνοριακές συνθήκες (1.151) - (1.153) και παίρνουμε

$$e^{i\beta^{(1)}d}A_1 - e^{-i\beta^{(1)}d}A_2 = 0 \tag{1.162}$$

$$A_1 + A_2 - B_1 = 0 \tag{1.163}$$

$$-i\mu^{(1)}A_1 + i\mu^{(1)}\beta^{(1)}A_2 - \mu^{(2)}\beta^{(2)}B_1 = 0 \tag{1.164}$$

Για την ύπαρξη μη τετριμμένης λύσης πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να μηδενίζεται, δηλαδή πρέπει

$$\mu^{(2)}\beta^{(2)} - \mu^{(1)}\beta^{(1)}\tan\beta d = 0 \tag{1.165}$$

που με χρήση των (1.158) και (1.159) δίνει

$$\mu^{(2)}\left[1-\left(\frac{c}{c_2^{(2)}}\right)^2\right]^{1/2} - \mu^{(1)}\left[\left(\frac{c}{c_2^{(1)}}\right)^2-1\right]^{1/2}\tan kd\left[\left(\frac{c}{c_2^{(1)}}\right)^2-1\right]^{1/2} = 0 \tag{1.166}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\omega = kc \tag{1.167}$$

η εξίσωση (1.166) μπορεί να γραφεί με χρήση της συχνότητας και του κυματικού αριθμού.

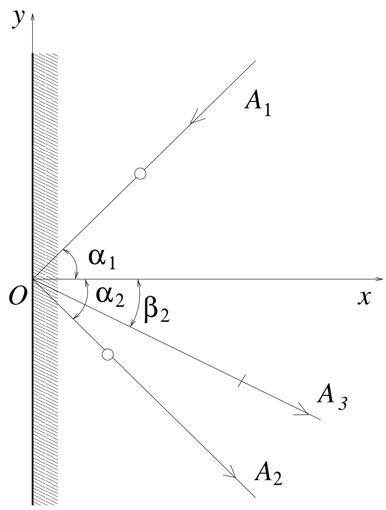
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι τα κύματα Love είναι διασπειρόμενα. Οι ρίζες της (1.166) για διαφορετικές τιμές του k, θα δώσουν $c = c(k)$ ή $\omega = \omega(k)$. Οι πολλοί κλάδοι της συνάρτησης εφαπτομένης $\tan$ στη σχέση (1.166), δείχνουν ότι θα έχουμε πολλές ρίζες για κάθε τιμή του k. Έτσι οι καμπύλες διασποράς και το φάσμα συχνοτήτων, έχουν πολλούς κλάδους που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τρόπους διάδοσης. Παρατηρούμε ακόμη ότι, για μεγάλα μήκη κύματος σε σχέση με το πάχος d της στρώσης, δηλαδή όταν $kd \to 0$, τα κύματα Love διαδίδονται με την ταχύτητα των εγκαρσίων κυμάτων του ημιχώρου.

1.7 Ανάκλαση ελαστικών κυμάτων σε ελεύθερο σύνορο.

Έχει αναφερθεί σε προηγούμενες ενότητες ότι στα στερεά σώματα διαδίδονται κύματα δύο ειδών, τα διαμήκη και τα εγκάρσια. Θα δείξουμε ότι όταν ένα διαμήκες ή εγκάρσιο κύμα προσπίπτει πάνω σ' ένα σύνορο μεταξύ δύο σωμάτων, δημιουργούνται ανακλάσεις και διαθλάσεις. Στην πιο γενική περίπτωση, δημιουργούνται τέσσερα χωριστά κύματα. Ένα ανακλώμενο εγκάρσιο, ένα ανακλώμενο διαμήκες, ένα διαθλώμενο εγκάρσιο και ένα διαθλώμενο διαμήκες.

Πρώτα θα δείξουμε ότι όταν ένα διαμήκες κύμα με επίπεδο μέτωπο ανακλάται πάνω σε μια ελεύθερη επιφάνεια, ιδεατά μια επιφάνεια που συνορεύει με κενό αέρα, οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται θεωρώντας ότι ανακλάται μόνο ένα διαμήκες κύμα. Στη συνέχεια θα βρούμε τη διεύθυνση διάδοσης και το εύρος ενός επί πλέον ανακλώμενου εγκάρσιου κύματος, που είναι αναγκαίο για να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες.

Θα θεωρήσουμε ότι η διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος διαμήκους κύματος βρίσκεται στο επίπεδο xy, σχηματίζοντας γωνία α_1 με τον άξονα x (Σχήμα 1.6). Η ελεύθερη επιφάνεια βρίσκεται στο επίπεδο yz. Θεωρούμε ένα απλό αρμονικό διαμήκες κύμα που η μετατόπισή του κάθετα προς το μέτωπο είναι Φ_1. Τότε έχουμε



Σχήμα 1.6: Ανάκλαση διαμήκους κύματος σε ελεύθερο σύνορο.

$$\Phi_1 = A_1 \sin(\omega t + k_1 x + l_1 y) \tag{1.168}$$

όπου A_1 είναι το εύρος του κυματισμού,

$$k_1 = \frac{\omega \cos \alpha_1}{c_1} \tag{1.169}$$

$$l_1 = \frac{\omega \sin \alpha_1}{c_1} \tag{1.170}$$

είναι οι προβολές του κυματικού αριθμού στους άξονες x και y αντίστοιχα και c_1 είναι η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων. Εδώ το προσπίπτον διαμήκες κύμα ταξιδεύει κατά την αρνητική διεύθυνση των αξόνων x και y. Αν u_1 και v_1 είναι οι μετατοπίσεις του προσπίπτοντος κύματος κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, έχουμε

$$u_1 = \Phi_1 \cos\alpha_1 \tag{1.171}$$
$$v_1 = \Phi_1 \sin\alpha_1. \tag{1.172}$$

Αν τώρα δημιουργείται ένα ανακλώμενο διαμήκες κύμα που ταξιδεύει κατά γωνία α_2 ως προς τον άξονα x και η μετατόπισή του κάθετα προς το μέτωπό του είναι Φ_2, τότε έχουμε

$$\Phi_2 = A_2 \sin(\omega t - k_2 x + l_2 y + \delta_1) \tag{1.173}$$

όπου

$$k_2 = \frac{\omega\cos\alpha_2}{c_1}, \tag{1.174}$$
$$l_2 = \frac{\omega\sin\alpha_2}{c_1}, \tag{1.175}$$

δ_1 είναι μια σταθερά που επιτρέπει αλλαγή φάσης στο κύμα με την ανάκλαση και A_2 είναι το εύρος του ανακλώμενου διαμήκους κύματος. Οι συνιστώσες της μετατόπισης u_2 και v_2 του ανακλώμενου διαμήκους κύματος, κατά τους άξονες x και y, τότε θα είναι

$$u_2 = -\Phi_2 \cos\alpha_2 \tag{1.176}$$
$$v_2 = \Phi_2 \sin\alpha_2. \tag{1.177}$$

Στο ελεύθερο σύνορο όπου $x = 0$ θα πρέπει

$$\sigma_{xx} = 0 \tag{1.178}$$
$$\sigma_{xy} = 0 \tag{1.179}$$

για όλες τις τιμές του y και του t. Οι συνολικές μετατοπίσεις u και v εξ αιτίας του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου διαμήκους κύματος θα είναι

$$u = u_1 + u_2 \tag{1.180}$$
$$v = v_1 + v_2 \tag{1.181}$$

Η συνολική ορθή τάση σ_{xx} στο ελαστικό μέσο, εξ αιτίας του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου διαμήκους κύματος, είναι

$$\sigma_{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.182}$$

όπου στο συγκεκριμένο πρόβλημα

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.183}$$

διότι δεν υπάρχει μετατόπιση w κατά τον άξονα z, δηλαδή $w = 0$ παντού στο ελαστικό μέσο.

Από τις σχέσεις (1.166) - (1.175) και (1.180) - (1.182), βρίσκουμε τελικά ότι σε κάθε σημείο του ελαστικού μέσου η ορθή τάση σ_{xx} δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{xx} = \frac{\omega}{c_1}\left[\left(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha_1\right)\Phi_1' + \left(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha_2\right)\Phi_2'\right] \tag{1.184}$$

όπου

$$\Phi_1' = A_1\cos(\omega t + k_1 x + l_1 y) \tag{1.185}$$

$$\Phi_2' = A_2\cos(\omega t - k_2 x + l_2 y + \delta_1). \tag{1.186}$$

Πάνω στο στο σύνορο $x = 0$, όπου $\sigma_{xx} = 0$, οι σχέσεις (1.178) και (1.184) δίνουν τελικά

$$\begin{aligned} A_1(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha_1)\cos(\omega t + l_1 y) + \\ A_2(\lambda + 2\mu\cos^2\alpha_2)\cos(\omega t + l_2 y + \delta_1) = 0 \end{aligned} \tag{1.187}$$

Η εξίσωση (1.187) ικανοποιείται γι όλες τις τιμές του y και του t, αν

$$l_1 = l_2 \tag{1.188}$$

ή ισοδύναμα αν

$$\alpha_1 = \alpha_2 \tag{1.189}$$

Τότε ή

$$\delta_1 = 0 \quad \text{και} \quad A_1 = -A_2 \tag{1.190}$$

ή

$$\delta_1 = \pi \quad \text{και} \quad A_1 = A_2. \tag{1.191}$$

Φυσικά, οι (1.190) και (1.191) είναι ισοδύναμες και αντιστοιχούν σε αλλαγή φάσης κατά π κατά την ανάκλαση.

Η διατμητική τάση

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.192}$$

στο ελαστικό μέσο, γράφεται ως

$$\sigma_{xy} = \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1\sin\alpha_1 + \Phi_2\sin\alpha_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1\cos\alpha_1 - \Phi_2\cos\alpha_2)\right] \tag{1.193}$$

και πάνω στο ελεύθερο σύνορο, δηλαδή για $x = 0$, η (1.193) δίνει

$$\frac{\omega\mu}{c_1}\left[A_1 \sin 2\alpha_1 \cos(\omega t + l_1 y) - A_2 \sin 2\alpha_2 \cos(\omega t + l_2 y)\right] = 0. \tag{1.194}$$

Η παραπάνω εξίσωση (1.194) δεν ικανοποιείται με τις σχέσεις (1.189) και (1.190) που μηδενίζουν την ορθή τάση σ_{xx} στο ελεύθερο σύνορο. Επομένως, αν έχουμε μόνο το διαμήκες ανακλώμενο κύμα δε μπορούμε να πάρουμε ταυτόχρονα μηδενικές ορθές και διατμητικές τάσεις στο ελεύθερο σύνορο. Αν όμως θεωρήσουμε ότι και ένα εγκάρσιο κύμα ανακλάται επιπλέον, τότε και οι δύο συνοριακές συνθήκες μπορούν να ικανοποιηθούν.

Έστω ότι η διεύθυνση διάδοσης του εγκάρσιου κύματος σχηματίζει γωνία β_2 με τον άξονα x (Σχήμα 1.6). Έστω ακόμη ότι η μετατόπιση που παράγεται από αυτό το κύμα είναι Φ_3 όπου

$$\Phi_3 = A_3 \sin(\omega t - k_3 x + l_3 y + \delta_2) \tag{1.195}$$

where

$$k_3 = \frac{\omega \cos\beta_2}{c_2} \tag{1.196}$$

$$l_3 = \frac{\omega \sin\beta_2}{c_2} \tag{1.197}$$

όπου c_2 είναι η ταχύτητα διάδοσης των εγκαρσίων κυμάτων και η ποσότητα δ_2 επιτρέπει την αλλαγή φάσης στη διάδοση του εγκάρσιου κύματος κατά την ανάκλαση.

Οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων εξ αιτίας αυτού του εγκάρσιου κύματος θα είναι κάθετες προς τη διεύθυνση διάδοσής του και επειδή έχουμε υποθέσει ότι δεν υπάρχει κίνηση κατά τη διεύθυνση z, οι ταλαντώσεις αυτές πρέπει να πραγματοποιούνται μέσα στο επίπεδο xy. Αν u_3 και v_3 είναι οι συνιστώσες της μετατόπισης που παράγονται από αυτό το κύμα, τότε

$$u_3 = \Phi_3 \sin\beta_2 \tag{1.198}$$

$$v_3 = \Phi_3 \cos\beta_2. \tag{1.199}$$

Η συνοριακή συνθήκη μηδενισμού της διατμητικής τάσης σ_{xy} στο σύνορο $x = 0$, δίνει

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.200}$$

όπου τώρα

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \tag{1.201}$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \tag{1.202}$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις και πράξεις στην (1.200), τελικά παίρνουμε

$$\frac{A_1}{c_1}\omega \sin 2\alpha_1 \cos(\omega t + l_1 y) - \frac{A_2}{c_1}\omega \sin 2\alpha_2 \cos(\omega t + l_2 y + \delta_1) - \\ \frac{A_3}{c_2}\omega \cos 2\beta_2 \cos(\omega t + l_3 y + \delta_2) = 0. \tag{1.203}$$

Η (1.203) μπορεί να ικανοποιηθεί για όλες τις τιμές των y και t θέτοντας

$$l_1 = l_2 = l_3 \tag{1.204}$$

που δίνει

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_1} = \frac{\sin \beta_2}{c_2} \tag{1.205}$$

ή

$$\alpha_1 = \alpha_2 \tag{1.206}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{2+\lambda}{\rho}}. \tag{1.207}$$

Επομένως, μετά την πρόσπτωση του διαμήκους κύματος στο ελεύθερο σύνορο, ανακλάται ένα διαμήκες κύμα υπό γωνία ίση με τη γωνία πρόσπτωσης και ένα εγκάρσιο κύμα υπό γωνία παρόμοια με αυτή που παρατηρούμε κατά τη διάθλαση του φωτός. Πρέπει ακόμη να έχουμε

$$\delta_1 = \delta_2 = 0 \tag{1.208}$$

ή

$$\delta_1 = \delta_2 = \pi. \tag{1.209}$$

Θεωρώντας ότι ισχύει η (1.208) αντικαθιστώντας στην (1.203), τελικά παίρνουμε την ακόλουθη σχέση για τα εύρη

$$2(A_1 - A_2)\cos \alpha_1 \sin \beta_2 - A_3 \cos 2\beta_2 = 0 \tag{1.210}$$

Πρέπει τώρα να ελέγξουμε αν με την προσθήκη του ανακλώμενου εγκάρσιου κύματος, μπορούμε να ικανοποιήσουμε και τη συνθήκη μηδενισμού της ορθής τάσης σ_{xx} στο σύνορο $x = 0$. Ισχύει ότι

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.211}$$

και κάνοντας τις αντικαταστάσεις από τα παραπάνω αποτελέσματα και τις πράξεις τελικά παίρνουμε

$$(A_1 + A_2)\cos 2\beta_2 \sin \alpha_1 - A_3 \sin \beta_2 \sin 2\beta_2 = 0. \tag{1.212}$$

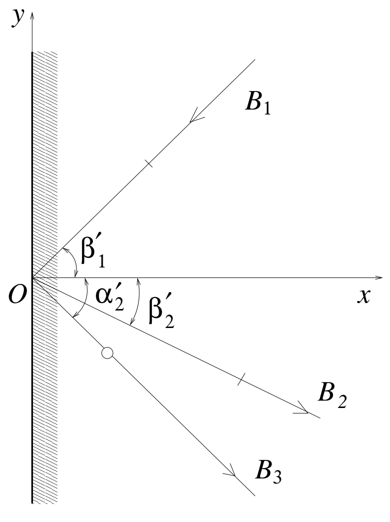
Από τις εξισώσεις (1.210) και (1.212) μπορούμε να υπολογίσουμε τα εύρη A_2 και A_3 των ανακλωμένων κυμάτων, σαν συνάρτηση του εύρους A_1 του προσπίπτοντος διαμήκους κύματος. Επειδή οι δύο εξισώσεις αυτές ισχύουν για αρμονικά κύματα οποιασδήποτε συχνότητας, θα ισχύουν επίσης και για κύματα οποιασδήποτε κυματομορφής.

Για κάθετη πρόσπτωση ($\alpha_1 = 0$) του διαμήκους κύματος στο σύνορο, βρίσκουμε ότι

$$A_3 = 0 \tag{1.213}$$

και επομένως δεν υπάρχει τότε ανακλώμενο εγκάρσιο κύμα. Τα εύρη του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου διαμήκους κύματος είναι τότε ίσα και έχουμε αλλαγή φάσης κατά π κατά την ανάκλαση στο σύνορο.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την ανάκλαση ενός εγκάρσιου κύματος που προσπίπτει στην ελεύθερη επιφάνεια. Όπως πριν, έχουμε ένα κύμα με επίπεδο μέτωπο που ταξιδεύει παράλληλα προς το επίπεδο xy και προσπίπτει στην ελεύθερη επιφάνεια, που συμπίπτει με το επίπεδο yz. Θεωρούμε ότι η γωνία πρόσπτωσης του εγκάρσιου κύματος είναι β_1' (Σχήμα 1.6). Για τη διερεύνηση του προβλήματος αυ-



Σχήμα 1.7: Ανάκλαση εγκάρσιου κύματος σε ελεύθερο σύνορο.

τού, θα πρέπει να ορίσουμε τη διεύθυνση της διαταραχής στο κύμα. Οι μετατοπίσεις που προκύπτουν από ένα εγκάρσιο κύμα, μπορούν να θεωρηθούν ότι προκύπτουν από την επαλληλία δύο συνιστώντων κυμάτων, των οποίων οι ταλαντώσεις πραγματοποιούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Θα πρέπει επομένως να προσδιορίσουμε τις συνθήκες ανάκλασης, για ένα κύμα με την ταλάντωση να πραγματοποιείται παράλληλα στον άξονα z και για ένα άλλο κύμα που η ταλάντωσή του πραγματοποιείται κάθετα προς τον άξονα z. Οι συνθήκες για οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση ταλάντωσης, μπορούν να βρεθούν συνδυάζοντας τα επί μέρους αποτελέσματα.

Οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιηθούν είναι

$$\sigma_{xx} = 0 \tag{1.214}$$

$$\sigma_{xy} = 0 \tag{1.215}$$

$$\sigma_{xz} = 0 \tag{1.216}$$

για $x = 0$. Για ένα εγκάρσιο κύμα που έχει τη διεύθυνση ταλάντωσης των υλικών σημείων παράλληλη προς τον άξονα των z, δεν υπάρχει κίνηση κατά τις διευθύνσεις x και y, έτσι λοιπόν

$$u = 0 \tag{1.217}$$

$$v = 0 \tag{1.218}$$

Επομένως, οι συνοριακές συνθήκες (1.214) - (1.216) θα ικανοποιηθούν από ένα ανακλώμενο εγκάρσιο κύμα με εύρος ίσο με το εύρος του προσπίπτοντος κύματος, γωνία ανάκλασης ίση με τη γωνία πρόσπτωσης, δηλαδή

$$\beta_2' = \beta_1' \tag{1.219}$$

και με φάση αντίθετη από την αντίστοιχη του προσπίπτοντος κύματος. Διαμήκες ανακλώμενο κύμα δε θα δημιουργηθεί σ' αυτή την περίπτωση.

Για ένα εγκάρσιο κύμα με τη διεύθυνση ταλάντωσης των υλικών σημείων να είναι κάθετη προς τον άξονα των z, η διαδικασία είναι ανάλογη με αυτή που παρουσιάστηκε ήδη για ένα προσπίπτον διαμήκες κύμα. Τώρα δεν υπάρχει κίνηση κατά τη διεύθυνση z και οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες είναι

$$\sigma_{xx} = 0 \tag{1.220}$$

$$\sigma_{xy} = 0 \tag{1.221}$$

στο σύνορο $x = 0$. Αποδεικνύεται ότι για την ικανοποίηση των συνθηκών (1.220) και (1.221), απαιτείται η ύπαρξη και ενός ανακλώμενου διαμήκους κύματος πέρα από το ανακλώμενο αντίστοιχο εγκάρσιο. Το ανακλώμενο εγκάρσιο κύμα ανακλάται υπό γωνία β_2' ίση με τη γωνία πρόσπτωσης β_1', ενώ το ανακλώμενο διαμήκες κύμα ανακλάται υπό γωνία α_2' όπου

$$\frac{\sin \alpha_2'}{\sin \beta_1'} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{1.222}$$

Αν το εύρος του προσπίπτοντος εγκάρσιου κύματος είναι B_1, το εύρος του ανακλώμενου εγκάρσιου κύματος είναι B_2 και το εύρος του ανακλώμενου διαμήκους κύματος είναι B_3, οι συνοριακές συνθήκες (1.220) και (1.221) στο σύνορο $x = 0$, δίνουν

$$(B_1 + B_2)\sin 2\beta_1' \sin\beta_1' - B_3 \sin\alpha_2' \cos 2\beta_1' = 0 \tag{1.223}$$

$$(B_1 - B_2)\cos 2\beta_1' - 2B_3 \sin\beta_1' \cos\alpha_2' = 0 \tag{1.224}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις μπορούμε να βρούμε τα εύρη B_2 και B_3 σαν συνάρτηση του B_1, για κάθε γωνία πρόσπτωσης β_1'. Αποδεικνύεται ακόμη ότι κατά την κάθετη πρόσπτωση του εγκάρσιου κύματος στο σύνορο, δηλαδή όταν

$$\beta_1' = 0 \tag{1.225}$$

δε δημιουργείται ανακλώμενο διαμήκες κύμα, δηλαδή

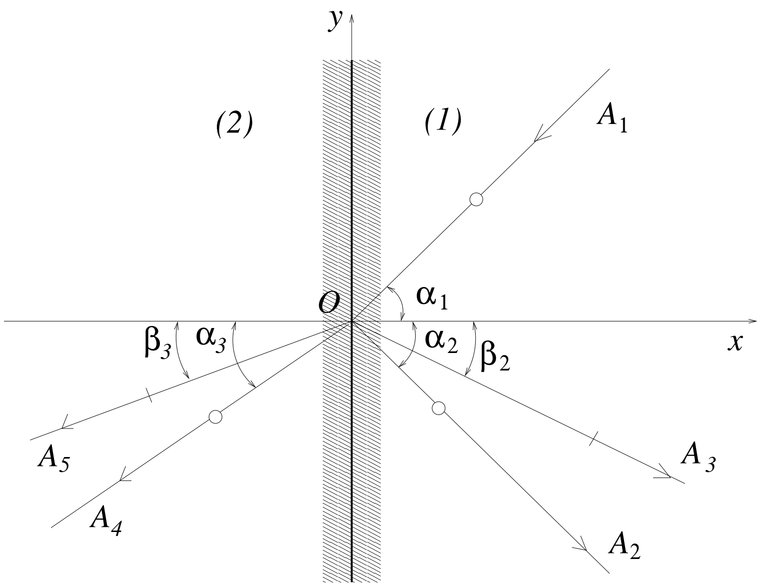
$$B_3 = 0. \tag{1.226}$$

1.8 Ανάκλαση και διάθλαση κυμάτων στο σύνορο μεταξύ δύο μέσων

Όταν ένα εγκάρσιο ή διαμήκες ελαστικό κύμα προσπίπτει σ' ένα σύνορο συγκόλλησης μεταξύ δύο ελαστικών μέσων, γενικά δημιουργούνται τέσσερα νέα κύματα. Δύο απ' αυτά διαθλώνται στο γειτονικό μέσο και τα άλλα δύο ανακλώνται στο αρχικό μέσο. Η διαδικασία για τη διερεύνηση αυτού του προβλήματος είναι παρόμοια με την αντίστοιχη για το μέσο με το ελεύθερο σύνορο.

Πάνω στο επίπεδο σύνορο συγκόλλησης μεταξύ των δύο ημιχώρων, ισχύουν τώρα συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουν την ισότητα των στοιχείων των τάσεων και των μετατοπίσεων που αναπτύσσονται στα δύο μέσα. Σε κάθε συνιστώσα της μετατόπισης και της τάσης, υπάρχουν πέντε διαφορετικές συνεισφορές. Μία από το ένα προσπίπτον κύμα, δύο από τα δύο ανακλώμενα κύματα και δύο από τα δύο διαθλώμενα κύματα.

Θεωρούμε ένα κύμα με επίπεδο μέτωπο που ταξιδεύει μέσα στο επίπεδο xy και έστω ότι το σύνορο συγκόλλησης συμπίπτει με το επίπεδο yz (Σχήμα 1.8). Ο άνω δείκτης (1) αναφέρεται στο μέσο όπου διαδίδεται το προσπίπτον και τα ανακλώμενα κύματα και ο άνω δείκτης (2) αναφέρεται στο μέσο όπου ταξιδεύουν τα διαθλώμενα κύματα. Έστω ότι το προσπίπτον κύμα είναι διαμήκες και η γωνία πρόσπτωσής του είναι α_1 ως προς τον άξονα x. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι διευθύνσεις του ανακλώμενου διαμήκους και του ανακλώμενου εγκάρσιου κύματος με τον άξονα των x είναι α_2 και β_2 αντίστοιχα. Τέλος, οι γωνίες που σχηματίζουν οι διευθύνσεις του διαθλώμενου διαμήκους και του διαθλώμενου εγκάρσιου κύματος με τον άξονα των x είναι α_3 και β_3 αντίστοιχα. Οι ταχύτητες διάδοσης του διαμήκους και του εγκάρσιου κύματος στο μέσο (1) είναι c_1 και c_2 αντίστοιχα, ενώ οι



Σχήμα 1.8: Ανάκλαση και διάθλαση διαμήκους κύματος σε σύνορο συγκόλλησης.

ταχύτητες διάδοσης του διαμήκους και του εγκάρσιου κύματος στο μέσο (2) είναι c_3 και c_4 αντίστοιχα. A_1, A_2 και A_3 είναι τα εύρη του προσπίπτοντος διαμήκους κύματος, του ανακλώμενου διαμήκους κύματος και του ανακλώμενου εγκάρσιου κύματος αντίστοιχα. A_4 και A_5 είναι τα εύρη του διαθλώμενου διαμήκους κύματος και του διαθλώμενου εγκάρσιου κύματος αντίστοιχα. Οι αριθμητικοί κάτω δείκτες συμβολίζουν το καθένα από τα πέντε κύματα που απεικονίζονται στο Σχήμα 1.8. Οι συνοριακές συνθήκες στο σύνορο συγκόλλησης, δηλαδή για $x = 0$, είναι

$$\sum_{i=1}^{3} u_i^{(1)} = \sum_{i=4}^{5} u_i^{(2)} \tag{1.227}$$

$$\sum_{i=1}^{3} v_i^{(1)} = \sum_{i=4}^{5} v_i^{(2)} \tag{1.228}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sigma_{xx_i}^{(1)} = \sum_{i=4}^{5} \sigma_{xx_i}^{(2)} \tag{1.229}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sigma_{xy_i}^{(1)} = \sum_{i=4}^{5} \sigma_{xy_i}^{(2)} \tag{1.230}$$

Όπως και στην περίπτωση της διάδοσης του φωτός ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\sin\alpha_1}{c_1} = \frac{\sin\alpha_2}{c_1} = \frac{\sin\beta_2}{c_2} = \frac{\sin\alpha_3}{c_3} = \frac{\sin\beta_3}{c_4} \tag{1.231}$$

Οι συνοριακές συνθήκες (1.227) - (1.230) τελικά δίνουν τις σχέσεις

$$(A_1 - A_2)\cos\alpha_1 + A_3\sin\beta_2 - A_4\cos\alpha_3 - A_5\sin\beta_3 = 0 \tag{1.232}$$

$$(A_1 + A_2)\sin\alpha_1 + A_3\cos\beta_2 - A_4\sin\alpha_3 + A_5\cos\beta_3 = 0 \tag{1.233}$$

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2)c_1\cos 2\beta_2 - A_3 c_2\sin 2\beta_2 - A_4 c_3\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}\cos 2\beta_3 - \\ A_5 c_4\frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}}\sin 2\beta_3 = 0\end{aligned} \tag{1.234}$$

$$\begin{aligned}\rho^{(1)}c_2^2\left[(A_1 - A_2)\sin 2\alpha_1 - A_3\frac{c_1}{c_2}\cos 2\beta_2\right] - \\ \rho^{(2)}c_4^2\left[A_4\frac{c_1}{c_3}\sin 2\alpha_3 - A_5\frac{c_1}{c_4}\cos 2\beta_3\right] = 0\end{aligned} \tag{1.235}$$

Από τις σχέσεις (1.232) - (1.235) μπορούμε να βρούμε τα εύρη A_2 - A_4 των ανακλώμενων και των διαθλώμενων κυμάτων σαν συνάρτηση του εύρους A_1 του προσπίπτοντος κύματος.