ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

~~Επαναληπτική~~ εξέταση στο μάθημα ΦΥΣΙΚΗ Ι **25 Φεβρουαρίου 2008**

Διδάσκοντες: Λ. Απέκης, Κ. Χριστοδουλίδης

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Θέμα 1. Ένα σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο xy έτσι ώστε οι συνιστώσες της ταχύτητάς του να είναι: $\upsilon_x = \alpha y$ και $\upsilon_y = -\beta x$, όπου α και β είναι θετικές σταθερές.

(α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα και δείξετε ότι η δύναμη αυτή είναι κεντρική.

(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του σώματος κατά μήκος των αξόνων x και y, και δείξετε ότι η κίνηση που εκτελεί το σώμα είναι συνδυασμός δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων κατά μήκος των δύο αξόνων.

(γ) Αν η αρχική θέση του σώματος είναι $x(0) = H$ και $y(0) = 0$, δείξετε ότι η τροχιά που διαγράφει το σώμα είναι έλλειψη. (*Υπόδειξη:* Για ευκολία, χρησιμοποιήστε τη μορφή $X(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ της λύσης για την κίνηση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.)

Θέμα 2. Σώμα μάζας $m = 1$ kg μπορεί να κινείται πάνω στον άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια είναι: $U(x) = x^2(1-x)$ $(-\infty < x < \infty)$, σε μονάδες S.I.

(α) Υπολογίστε τη δύναμη $F_x(x)$ που ασκείται πάνω στο σώμα.

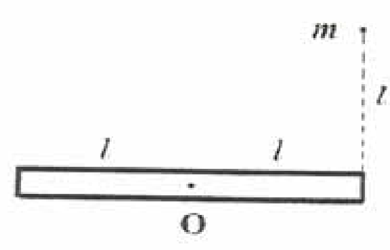
(β) Σχεδιάστε τη δυναμική ενέργεια $U(x)$ και βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος, καθώς και το είδος της ισορροπίας σε αυτά τα σημεία.

(γ) Πόση είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να δοθεί το σώμα στη θέση $x = 0$ για να μπορέσει να φθάσει στο άπειρο;

(δ) Το σώμα μετατοπίζεται κατά απόσταση a από το $x = 0$ και αφήνεται να κινηθεί με μηδενική αρχική ταχύτητα. Δείξετε ότι, για μικρές τιμές του a $(a \ll 1\,\text{m})$ η κίνηση που θα προκύψει είναι απλή αρμονική.

Θέμα 3. Μια ομογενής λεπτή ράβδος έχει μήκος 2ℓ και μάζα M. Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της, Ο, και είναι κάθετος σε αυτήν. Η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από αυτόν τον άξονα είναι $I_0 = \frac{1}{3}M\ell^2$. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη και οριζόντια.

Μια σημειακή μάζα $m = M/3$ βρίσκεται αρχικά ακίνητη πάνω από το ένα άκρο της ράβδου, και σε ύψος ℓ πάνω από αυτό. Η μάζα αφήνεται ελεύθερη, με μηδενική αρχική ταχύτητα, να πέσει και να συγκρουστεί με το άκρο της ράβδου, στο οποίο και σφηνώνεται. Δείξετε ότι:



(α) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου μετά από την κρούση είναι $\omega_0 = \sqrt{g/2\ell}$.

(β) Κατά την κρούση, η μισή κινητική ενέργεια της m μετατρέπεται σε θερμότητα.

(γ) Η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος της ράβδου και της σημειακής μάζας, στην κίνηση που θα επακολουθήσει, είναι $\omega_{max} = \sqrt{3}\,\omega_0$.

⇒⇒⇒ ⇒⇒⇒

Θέμα 4 (Σχετικότητα). (α) Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M κινείται στο εργαστήριο με ταχύτητα $V=\frac{3}{5}c$. Το σωματίδιο διασπάται σε δύο άλλα: ένα με μάζα ηρεμίας m_1 που παραμένει ακίνητο και ένα άλλο με μάζα ηρεμίας m_2 που κινείται με ταχύτητα $\upsilon=\frac{4}{5}c$. Να βρεθούν οι μάζες m_1 και m_2 συναρτήσει της M.

(β) Αν σε ένα σημείο παράγονται πολλά τέτοια σωματίδια με μάζα m_2 και ταχύτητα $\upsilon=\frac{4}{5}c$, και τα σωματίδια αυτά είναι ασταθή με μέσο χρόνο ζωής $\tau=1/\lambda=10^{-8}$ s (στο δικό τους σύστημα), μετά από πόσο χρόνο, όπως μετράται στο εργαστήριο, θα μειωθεί ο αριθμός αυτών των σωματιδίων κατά ένα παράγοντα e ($e=2{,}71828...$); Πόση είναι η απόσταση που θα διανύσουν τα σωματίδια σε αυτό τον χρόνο; Πόση είναι στο σύστημα των σωματιδίων αυτή η απόσταση;

Γενικό Τυπολόγιο

$$\vec{F}(r)=-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \qquad U(r)=-G\frac{Mm}{r} \qquad \vec{\mathbf{L}}=M\,\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{v}} \qquad \vec{\mathbf{N}}=\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}} \qquad \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}=\vec{\mathbf{N}}$$

Νόμος της ραδιενέργειας: $N(t)=N_0e^{-\lambda t}=N_0e^{-t/\tau}$

<u>Σχετικιστική Κινηματική:</u>

Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S, και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t=t'=0$, τότε:

$$x'=\gamma(x-Vt) \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right) \qquad \beta\equiv\frac{V}{c} \qquad \gamma\equiv\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta l=\Delta l_0/\gamma \qquad \Delta t=\gamma\,\Delta t_0 \qquad \upsilon'_x=\frac{\upsilon_x-V}{1-\frac{\upsilon_xV}{c^2}}, \qquad \upsilon'_y=\frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon_xV}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_z=\frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1-\frac{\upsilon_xV}{c^2}\right)}.$$

<u>Σχετικιστική Δυναμική:</u>

$$m_0=m(0) \qquad m=m(\upsilon)=\gamma m_0 \qquad p=m\upsilon=\gamma m_0\upsilon \qquad E=mc^2=\gamma m_0c^2 \qquad E^2=m_0^2c^4+p^2c^2$$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας:

$$p'_x=\gamma\left(p_x-\frac{\beta E}{c}\right) \qquad p'_y=p_y \qquad p'_z=p_z \qquad E'=\gamma(E-c\beta\,p_x)$$

Για φωτόνια: $E=hf=\dfrac{hc}{\lambda}$ $\qquad E=pc$