ΣΕΜΦΕ
Τομέας Μαθηματικών
Ανάλυση Παλινδρόμησης
Ασκηση 1 Μέχρι 25/10

Δείξτε ότι για το απλό γραμμικό μοντέλο $E(y_x)=\alpha+\beta x$

1) $\operatorname{cov}(y_{x_0}, \hat{y}_{x_0}) = 0$, για δοθέν x_0, y_{x_0} παρατήρηση και $\hat{y}_{x_0}$ η αναμενόμενη (προβλεπόμενη) παρατήρηση

2) η διασπορά της $\hat{y}_{x_0} = \hat{\alpha}+\hat{\beta}x_0$ είναι

$$V(\hat{y}_{x_0})=\frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}+\frac{\sigma^2x_0^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}-\frac{2x_0\sigma^2\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right]$$

με δύο τρόπους:

α) μέσω αθροίσματος δύο τυχαίων μεταβλητών
~~β)~~ μέσω πινάκων

και στη συνέχεια να βρεθεί η διασπορά $V(y_{x_0} - \hat{y}_{x_0})$.

2) Δείξτε ότι στην περίπτωση του απλού γραμμικού μοντέλου $R^2 = r^2_{(x,y)}$, R^2 ο συντελεστής προσδιορισμού και $r_{(x,y)}$ ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης (Pearson).

3) Δείξτε ότι στο απλό γραμμικό μοντέλο

$$s^2 = S^2_{Y_x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{1}{n-2}\left\{S_{yy}-\frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right\} = \frac{1}{n-2}\left\{1-r_{xy}^2\right\}$$

4) Δείξτε ότι στο απλό γραμμικό μοντέλο ισχύει $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i$ (παρουσ. στις. σχολ. 25/10)

$\bar{y} = \bar{\hat{y}}$

5) Δείξτε ότι $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right) = 0$