1 Ευθέα Αθροίσματα και Προβολές

Ορισμός 1.1. Λέμε ότι ένας διανυσματικός χώρος X είναι το **αλγεβρικό ευθύ άθροισμα** δύο υποχώρων του Y, Z (συμβ. $X = Y \oplus Z$), αν κάθε στοιχείο $x \in X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Z$. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι ο Z αποτελεί ένα **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του Y. Αν επιπλέον ο X είναι χώρος με νόρμα και οι Y, Z κλειστοί, τότε θα λέμε ότι ο X είναι το **τοπολογικό ευθύ άθροισμα** των Y, Z και ότι ο Z αποτελεί ένα **τοπολογικό συμπλήρωμα** του Y.

Πρόταση 1.2. Ένας διανυσματικός χώρος X είναι το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα των υποχώρων του Y, Z αν και μόνο αν $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$.

Απόδειξη. Αν $X = Y \oplus Z$, τότε προφανώς $X = Y + Z$. Θα δείξουμε ότι $Y \cap Z = \{0\}$: Αν $x \in Y \cap Z$, το $0 \in X$ γράφεται ως $0 = 0 + 0 = x + (-x)$ με $0, x \in Y$ και $0, -x \in Z$. Επειδή η εν λόγω γραφή είναι μοναδική, θα πρέπει $x = 0$.

Αντιστρόφως, αν $Y \cap Z = \{0\}$ και $X = Y + Z$, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $y \in Y$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $x = y + z$. Η μοναδικότητα της γραφής προκύπτει από το ότι $Y \cap Z = \{0\}$: Αν $y' \in Y$ και $z' \in Z$ τέτοια ώστε $x = y + z = y' + z'$, τότε $y - y' = z' - z \in Y \cap Z = \{0\}$, επομένως $y = y'$ και $z = z'$. □

Η επόμενη πρόταση διασφαλίζει ότι κάθε υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου έχει αλγεβρικό συμπλήρωμα. Να σημειωθεί ότι για την περίπτωση των χώρων με νόρμα, εκτός από κάποιες ειδικές κατηγορίες χώρων όπως, για παράδειγμα, οι χώροι Hilbert, δεν ισχύει απαραίτητα ότι κάθε κλειστός υπόχωρος θα έχει τοπολογικό συμπλήρωμα. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ο c_0 ως (κλειστός) υπόχωρος του ℓ_∞.

Πρόταση 1.3. Έστω X διανυσματικός χώρος και Y υπόχωρος του X. Τότε ο Y έχει αλγεβρικό συμπλήρωμα.

Απόδειξη. Έστω B μια βάση Hamel του Y και την επεκτείνουμε σε βάση B' του X. Θέτουμε $B'' = B' \setminus B$ και $Z = \operatorname{span} B''$. Θα δείξουμε ότι $X = Y \oplus Z$:

Αν $x \in X$, τότε υπάρχουν $b_1, \ldots, b_n \in B'$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Θεωρούμε τα σύνολα $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : b_i \in B\}$ και $J = \{i \in \{1, \ldots, n\} : b_i \in B''\}$, θέτουμε $y = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \in Y$ και $z = \sum_{i \in J} \lambda_i b_i \in Z$ και παρατηρούμε ότι $x = y + z$. Άρα $X = Y + Z$.

Απομένει να δείξουμε ότι $Y \cap Z = \{0\}$. Αν $x \in Y \cap Z$, τότε $x \in \operatorname{span} B \cap \operatorname{span} B''$, άρα υπάρχουν $b_1, \ldots, b_n \in B$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $b''_1, \ldots, b''_m \in B''$, $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i b''_i$. Τότε $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m} \mu_i b''_i = 0$ και από τη γραμμική ανεξαρτησία του $B \cup B''$ θα έχουμε ότι $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$, άρα $x = 0$. □

Ορισμός 1.4. Έστω X διανυσματικός χώρος και $P : X \to X$ γραμμικός τελεστής. Ο P ονομάζεται **προβολή**, αν $P^2 = P$, δηλαδή αν $P(Px) = Px$, για κάθε $x \in X$. Αν ο X υποτεθεί χώρος με νόρμα και ο P είναι επιπλέον φραγμένος, τότε ονομάζεται **φραγμένη προβολή**.

Παρατήρηση 1.5. Σε κάθε διανυσματικό χώρο, ο ταυτοτικός τελεστής I και ο μηδενικός τελεστής είναι πάντοτε προβολές.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι προβολές, περιορισμένες σε κατάλληλο υπόχωρο, δρουν σαν τον ταυτοτικό τελεστή. Μια συνέπεια αυτής της παρατήρησης είναι ότι οι φραγμένες προβολές έχουν νόρμα μεγαλύτερη ή ίση του 1.

Πρόταση 1.6. Έστω X διανυσματικός χώρος και $P : X \to X$ γραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α') Ο P είναι προβολή.

(β') Ισχύει ότι $Py = y$, για κάθε $y \in P[X]$.

Απόδειξη. (α') $\Rightarrow$ (β'): Ο $Y = P[X]$ είναι υπόχωρος του X με την ιδιότητα ότι για κάθε $y = Px \in Y$, $Py = P^2x = Px = y$.

(β') $\Rightarrow$ (α'): Για κάθε $x \in X$, $Px \in P[X] \Rightarrow P(Px) = Px$, δηλαδή $P^2 = P$.

□

Πόρισμα 1.7. Έστω X χώρος με νόρμα και $P : X \to X$ μια μη μηδενική φραγμένη προβολή. Τότε $\|P\| \geq 1$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη πρόταση και το ότι $P[X] \neq \{0\}$. Ένας δεύτερος τρόπος απόδειξης εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι η νόρμα στο χώρο $B(X)$ είναι υπο-πολλαπλασιαστική, δηλ. ότι για κάθε $S, T \in B(X)$, $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$. Έχουμε λοιπόν ότι $P = P^2 \Rightarrow \|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|\|P\| = \|P\|^2$, επομένως $\|P\|(1 - \|P\|) \leq 0$, από το οποίο προκύπτει ότι $\|P\| \geq 1$. □

Πρόταση 1.8. Έστω X διανυσματικός χώρος και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής.

(α') Ο T είναι προβολή αν και μόνο αν ο $I - T$ είναι προβολή.

(β') Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε ο T είναι φραγμένη προβολή αν και μόνο αν ο $I - T$ είναι φραγμένη προβολή.

Απόδειξη. (α') Αν ο T είναι προβολή, τότε $T^2 = T$ και $(I-T)^2 = I-2T+T^2 = I-2T+T = I-T$, δηλαδή ο $I - T$ προβολή. Αντιστρόφως, αν ο $I - T$ είναι προβολή, τότε και ο $I - (I - T) = T$ θα είναι κι αυτός προβολή.

(β') Άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα και το γεγονός ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $I - T$ είναι φραγμένος.

□

Πρόταση 1.9. Έστω X διανυσματικός χώρος και $P : X \to X$ προβολή. Τότε $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im}(I - P)$ και $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(I - P)$.

Απόδειξη. Αν $x \in \operatorname{Ker} P$, τότε $Px = 0$ και $(I - P)(x) = x - Px = x$, δηλαδή $x \in \operatorname{Im}(I - P)$. Αν $y \in \operatorname{Im}(I - P)$, τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $y = (I - P)(x) = x - Px$. Όμως $Py = P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0$, δηλαδή $y \in \operatorname{Ker} P$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, από την Πρόταση 1.8, ο τελεστής $I - P$ είναι προβολή, επομένως $\operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im}(I - (I - P)) = \operatorname{Im} P$. □

Πόρισμα 1.10. Αν X χώρος με νόρμα και $P : X \to X$ φραγμένη προβολή, τότε ο $\operatorname{Im} P$ αποτελεί κλειστό υπόχωρο του X.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(I - P)$ και ο $\operatorname{Ker}(I - P)$ είναι κλειστός υπόχωρος ως πυρήνας του φραγμένου τελεστή $I - P$. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των προβολών ενός διανυσματικού χώρου και τις διασπάσεις αυτού σε αλγεβρικά ευθέα αθροίσματα.

Πρόταση 1.11. Έστω X διανυσματικός χώρος.

(α') Αν $P : X \to X$ προβολή, τότε $X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$.

(β') Αν Y, Z υπόχωροι του X με $X = Y \oplus Z$, τότε υπάρχει προβολή $P : X \to X$ με $\operatorname{Im} P = Y$ και $\operatorname{Ker} P = Z$.

Απόδειξη. (α') Κάθε $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = (x - Px) + Px$, με $Px \in \operatorname{Im} P$ και $x - Px \in \operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$. Επιπλέον, αν $y \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P$, τότε υπάρχει $x \in X$ με $y = Px$ και $Py = 0$. Άρα $P(Px) = 0 \Rightarrow Px = P^2 x = 0$, δηλαδή $y = 0$.

(β') Ορίζουμε $P : X \to X$ για τον οποίο για κάθε $x \in X$ με $x = y + z$, $y \in Y, z \in Z$, $P(x) = P(y + z) = y$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι ο P είναι γραμμικός. Επιπλέον, $\operatorname{Ker} P = Z, \operatorname{Im} P = Y$ και ο P αποτελεί προβολή αφού $Py = y$, για κάθε $y \in P[X]$.

□

1.1 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Έστω X διανυσματικός χώρος και I ο ταυτοτικός τελεστής. Να βρεθούν τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ο τελεστής λI είναι προβολή.

Άσκηση 2. Έστω X χώρος με νόρμα και P, Q φραγμένες προβολές με $PQ = QP$. Να δειχθεί ότι είτε $P = Q$, είτε $\|P - Q\| \geq 1$. *(Υπόδειξη: Υποθέστε ότι $P \neq Q$ και δείξτε επαγωγικά ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(P - Q)^{2n-1} = P - Q$.)*

Άσκηση 3. Έστω $(X, \| \cdot \|)$ χώρος με νόρμα και $P \in B(X)$ φραγμένη προβολή. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in X$, $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Im} P) \leq \|x - Px\| \leq (\|P\| + 1) \operatorname{dist}(x, \operatorname{Im} P)$.