1 Πλήρωση Χώρου με Εσωτερικό Γινόμενο

Θεώρημα 1.1. Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου, τότε υπάρχει χώρος Hilbert H στον οποίον ο E εμφυτεύεται γραμμικά και ισομετρικά ως πυκνός υπόχωρος, δηλ. υπάρχει $T : E \to H$ γραμμική ισομετρική εμφύτευση, τέτοια ώστε $\overline{T[E]} = H$. Ο H ονομάζεται **πλήρωση** του E και είναι ο μοναδικός χώρος με αυτή την ιδιότητα, υπό την έννοια ότι αν ο H' είναι ένας χώρος Hilbert και $S : E \to H'$ ισομετρική εμφύτευση με $\overline{S[E]} = H'$, τότε υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $L : H \to H'$ τέτοιος ώστε $L \circ T = S$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & H \arrow[dl, dotted, "L"] \\ H' & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Όπως έχουμε δει, για κάθε $x_0 \in E$, το συναρτησιακό f_{x_0} για το οποίο $f(x) = \langle x, x_0\rangle$ για κάθε $x \in E$, είναι γραμμικό και φραγμένο. Επιπλέον $\|f_{x_0}\| = \|x_0\|$ και επομένως ο τελεστής $T : E \to E^*$ για τον οποίον $T(x) = f_x$ για κάθε $x \in E$, αποτελεί ισομετρική εμφύτευση του E στον E^*. Ο χώρος $T[E]$ δεν είναι εν γένει πλήρης, αλλά αν θέσουμε $H = \overline{T[E]}$ τότε ο H αποτελεί χώρο Banach ως κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach E^*. Θα δείξουμε ότι ο H αποτελεί τη ζητούμενη πλήρωση του E.

Το μόνο που μένει να αποδειχθεί, είναι ότι η νόρμα του H επάγεται από εσωτερικό γινόμενο. Καταρχάς δείχνουμε ότι αυτό συμβαίνει στον $T[E]$ και εν συνεχεία περνάμε στον H εκμεταλλευόμενοι την πυκνότητα του $T[E]$ στον H. Ορίζουμε λοιπόν $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : T[E] \times T[E] \to \mathbb{R}$ με $\langle Tx, Ty\rangle_1 := \langle x, y\rangle$, για κάθε $Tx, Ty \in T[E]$. Αξιοποιώντας το ότι η T είναι γραμμική ισομετρία, εύκολα επαληθεύουμε ότι η απεικόνιση που ορίσαμε αποτελεί εσωτερικό γινόμενο. Επιπλέον, η νόρμα $\|\cdot\|_1$ που επάγει στον $T[E]$, ταυτίζεται με τη νόρμα που ήδη έχει ως υπόχωρος του E^*, επειδή $\|Tx\|_1 = \sqrt{\langle Tx, Tx\rangle_1} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\| = \|Tx\|$, για κάθε $Tx \in T[E]$. Αφού ο $T[E]$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου και επιπλέον είναι πυκνός στον πλήρη χώρο H, από την Παρατήρηση (4) έχουμε ότι και η νόρμα του H επάγεται από εσωτερικό γινόμενο, άρα ο H είναι Hilbert.

Για τη μοναδικότητα της πλήρωσης, έστω H, H' δύο διαφορετικές πληρώσεις του E και έστω $T : E \to H$, $S : E \to H'$ οι αντίστοιχες ισομετρικές εμφυτεύσεις (βλ. το διάγραμμα παραπάνω). Ορίζουμε $f : T[E] \to H'$ με $f = S \circ T^{-1}$. Παρατηρήστε ότι η T είναι επί του $T[E]$, επομένως η f είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, αποτελεί γραμμική ισομετρική εμφύτευση του $T[E]$ στον H ως σύνθεση ισομετρικών εμφυτεύσεων. Επειδή ο $T[E]$ είναι πυκνός στον H, από γνωστή Πρόταση, υπάρχει γραμμικός και φραγμένος τελεστής $\tilde{f} : H \to H'$ ο οποίος επεκτείνει την f. Θέτουμε L να είναι αυτή η επέκταση. Προφανώς $L \circ T = S$. Θα δείξουμε ότι ο L είναι επιπλέον ισομετρία.

Έστω $x \in H$. Από την πυκνότητα του $T[E]$ στον H, υπάρχει ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ με $Te_n \to x$. Από τη συνέχεια του L,

$$\|Lx\| \;=\; \|\lim_{n\to\infty} LTe_n\| = \|\lim_{n\to\infty} Se_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Se_n\| = \lim_{n\to\infty} \|e_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Te_n\| = \|x\|.$$

Τέλος, δείχνουμε ότι η L είναι επί: Έστω $y_0 \in H'$. Λόγω της πυκνότητας του $S[E]$ στο H', υπάρχει ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ με $Se_n \to y_0$. Ειδικότερα η $(Se_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Επειδή οι S, T είναι ισομετρικές εμφυτεύσεις, εύκολα προκύπτει ότι και η ακολουθία $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης Cauchy στον H. Λόγω πληρότητας, θα υπάρχει $x_0 \in H$ τέτοιο ώστε $Te_n \to x_0$. Από τη συνέχεια του L, θα έχουμε ότι $S(e_n) = L(Te_n) \to L(x_0)$ και από τη μοναδικότητα του ορίου συμπεραίνουμε ότι $L(x_0) = y_0$, επομένως ο L είναι επί.

$\square$