Επίλυση Προβλημάτων Αρχικών / Συνοριακών Τιμών Μεταδόσεως Θερμότητας

Τα προβλήματα μεταδόσεως θερμότητας (ή θερμικής αγωγιμότητας – heat conduction), με την υπόθεση ισχύος του νόμου Fourier, διέπονται από τις ακόλουθες εξισώσεις σε τρείς διαστάσεις (*κλασσική θεωρία* μεταδόσεως θερμότητας σε ισότροπα μέσα)

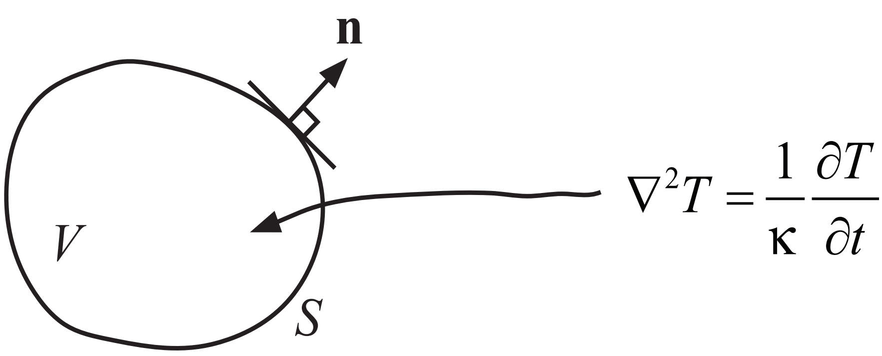
$$\mathbf{q} = -K\nabla T \qquad \text{ή} \qquad q_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i} \quad , \tag{1}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{ή} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t} \quad , \tag{2}$$

όπου $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ το διάνυσμα της θερμικής ροής (heat flux), $T \equiv T(\mathbf{x},t)$ η θερμοκρασία, k η θερμική αγωγιμότητα, και κ η σταθερά θερμικής διαχύσεως.

Συνοριακές συνθήκες

Οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (σ.σ.) στην επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο V του μέσου για προβλήματα που διέπονται από τις Εξ. (1) και (2) εμπίπτουν στους ακόλουθους τύπους:



(α) σ.σ. Dirichlet

Η θερμοκρασία είναι δεδομένη συνάρτηση σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S.

T: γνωστή συνάρτηση επί της S , (3α)

ή

$$T(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t) \quad , \tag{3β}$$

όπου $f(\mathbf{x},t)$ είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου t και της θέσεως στην επιφάνεια S.

(β) σ.σ. Neumann

Η θερμική ροή είναι δεδομένη συνάρτηση σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S.

$$\frac{\partial T}{\partial n} : \text{γνωστή συνάρτηση επί της } S \quad , \tag{4α}$$

ή

$$\frac{\partial T}{\partial n} = g(\mathbf{x},t) \quad , \tag{4β}$$

όπου $g(\mathbf{x},t)$ είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου t και της θέσεως στην επιφάνεια S και $\mathbf{n}$ το κάθετο προς τα έξω διάνυσμα στην επιφάνεια.

Στην περίπτωση *θερμικής μονώσεως* (thermal insulation) θα είναι $\partial T/\partial n = 0$ στην επιφάνεια S.

Στην περίπτωση *θερμικής επαφής* μεταξύ δύο διαφορετικών σωμάτων “1” και “2” θα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις κατά μήκος της επιφάνειας επαφής $T^{(1)} = T^{(2)}$ και $k^{(1)}\left(\partial T^{(1)}/\partial n\right) = k^{(2)}\left(\partial T^{(2)}/\partial n\right)$.

(γ) σ.σ. Robin–Cauchy

Συνδυασμός της θερμοκρασίας και της θερμικής ροής είναι δεδομένος σε όλα τα σημεία της επιφάνειας S.

$$T + a\frac{\partial T}{\partial n} : \text{γνωστή συνάρτηση επί της } S \quad , \tag{5α}$$

$$T + a\frac{\partial T}{\partial n} = h(\mathbf{x},t) \quad , \tag{5β}$$

όπου $h(\mathbf{x},t)$ είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου t και της θέσεως στην επιφάνεια S, και a είναι γνωστός συντελεστής (ή, γενικότερα, γνωστή συνάρτηση των $(\mathbf{x},t)$). Ο ανωτέρω τύπος σ.σ. αντιστοιχεί στον λεγόμενο *νόμο ψύξεως* του Newton (Newton’s cooling law).

Τέλος, στις περιπτώσεις που διαφορετικοί τύποι των σ.σ. (α), (β) και (γ) δίνονται σε συμπληρωματικά τμήματα του συνόρου S, έχουμε *μικτού* τύπου συνθήκες που οδηγούν εν γένει σε δύσκολα μαθηματικά προβλήματα.

Η έννοια του καλώς-ορισμένου προβλήματος

Γενικώς, προβλήματα που διέπονται από εξισώσεις του τύπου (1) και (2) συνοδευόμενες από κατάλληλες συνοριακές συνθήκες συνιστούν καλώς-ορισμένα (well posed) προβλήματα όταν πληρούνται τα εξής *κριτήρια* του Hadamard:

(1) Το πρόβλημα έχει λύση (ύπαρξη λύσεως – existence of solution),

(2) Η λύση είναι μοναδική (μοναδικότητα λύσεως – uniqueness of solution),

(3) Η λύση είναι ευσταθής, δηλαδή η λύση εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα και δεν αλλάζει δραματικά εάν υπάρξει μικρή αλλαγή στα δεδομένα του προβλήματος (ευστάθεια λύσεως – stability of solution).

Κατωτέρω, θα επιλυθούν δύο απλά προβλήματα μεταδόσεως θερμότητας σε μία διάσταση.

Παράδειγμα 1

Δίνεται το εξής πρόβλημα αρχικών / συνοριακών τιμών της θερμικής αγωγιμότητας ράβδου μήκους l

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \tag{1}$$

$$T(x,0) = 0 \quad , \tag{2}$$

$$T(0,t) = 0 \quad , \tag{3}$$

$$T(l,t) = 100 \quad . \tag{4}$$

Να προσδιορισθεί η συνάρτηση $T(x,t)$ για $0 < x < l$ και $t > 0$.

<u>Λύση</u>

Το πρόβλημα θα επιλυθεί με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace ως προς την χρονική μεταβλητή t (μονόπλευρος – one–sided μετασχηματισμός Laplace). Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζεται ως

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \qquad \text{(ευθύς μετασχηματισμός)} \ , \tag{5α}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}\overline{f}(s)\cdot e^{st}ds \qquad \text{(αντίστροφος μετασχηματισμός)} \ , \qquad (5\beta)$$

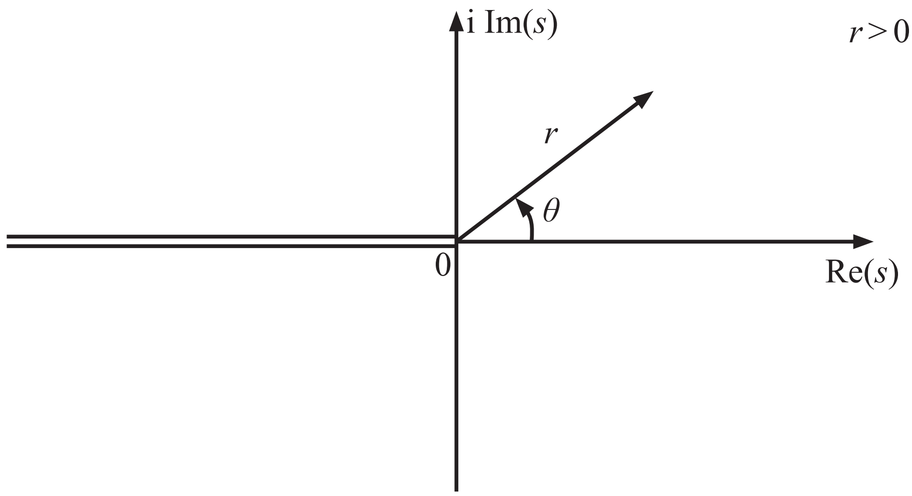
όπου Br είναι ο δρόμος ολοκληρώσεως Bromwich $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ στο μιγαδικό s-επίπεδο. Ο δρόμος ολοκληρώσεως αυτός είναι παράλληλος προς τον άξονα των φανταστικών αριθμών και είναι κατάλληλα "τοποθετημένος" ώστε στο δεξιό ημι–επίπεδο ως προς αυτόν να μην υπάρχουν ιδιόμορφα σημεία (πόλοι και κλαδικές τομές – κλαδικά σημεία για την συνάρτηση $\overline{f}(s)$). Ο πραγματικός αριθμός γ καθορίζεται από την εξής απαίτηση (δηλ. την απαίτηση για *σύγκλιση* του μετασχηματισμού)

$$\int_0^\infty |f(t)|\cdot e^{-\gamma t}dt < \infty \ . \qquad (6)$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον μετασχηματισμό (5α) στην (1), έχουμε

$$\int_0^\infty \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial t}\cdot e^{-st}dt \Rightarrow$$
$$\kappa\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^\infty Te^{-st}dt\right) = T(x,t)\cdot e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} + s\overline{T}(x,t) \Rightarrow$$
$$\kappa\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} - s\overline{T} = 0 \ , \qquad (7)$$

καθόσον $T(x,0)=0$ από την Εξ. (2). Σημειώνουμε επίσης ότι $\overline{T}\equiv\overline{T}(x,s)$, ενώ χειριζόμαστε το s ως παράμετρο και έτσι η Εξ. (7) αποτελεί συνήθη Δ.Ε.



Η γενική λύση της Εξ. (7) είναι

$$\overline{T}(x,s) = A \cdot \exp\left(\kappa^{-1/2} s^{1/2} x\right) + B \cdot \exp\left(-\kappa^{-1/2} s^{1/2} x\right) \quad , \tag{8}$$

όπου A και B αυθαίρετες συναρτήσεις της παραμέτρου s, ενώ για το $s^{1/2}$ εκλέγουμε την κλαδική τομή (branch cut) του ανωτέρω σχήματος.

Κατά μήκος της κλαδικής τομής $-\infty < \mathrm{Re}(s) < 0,\ \ \mathrm{Im}(s) = 0$ παρατηρήστε την *διτιμία* (double–valuedness) της συναρτήσεως $s^{1/2}$:

$s^{1/2} = r^{1/2} e^{i\pi/2} = +r^{1/2}$ από την «επάνω» πλευρά της τομής, ενώ

$s^{1/2} = r^{1/2} e^{-i\pi/2} = -r^{1/2}$ από την «κάτω» πλευρά της τομής.

Επίσης, μετασχηματίζοντας τις συνοριακές συνθήκες (3) και (4) λαμβάνουμε

$$\overline{T}(x=0,s) = 0 \quad , \qquad \overline{T}(x=l,s) = 100/s \quad . \tag*{(9), (10)}$$

Συνδυάζοντας πλέον τις Εξ. (8) – (10) προκύπτει αλγεβρικό σύστημα 2×2 για τα A και B. Τελικά, η μετασχηματισμένη λύση δίνεται ως

$$\overline{T}(x,s) = \frac{100}{s} \frac{\sinh\left(\kappa^{-1/2} s^{1/2} x\right)}{\sinh\left(\kappa^{-1/2} s^{1/2} l\right)} \quad , \tag{11}$$

όπου μπορεί να ελεγχθεί ότι *δεν* υπάρχουν κλαδικές τομές και η συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (11) είναι πράγματι μονότιμη (είναι δε άρτια συνάρτηση του $s^{1/2}$ που σημαίνει ότι περιέχει άρτιες δυνάμεις του $s^{1/2}$ σε ανάπτυγμα σειράς ως προς το σημείο $s = 0$), ενώ η *αντιστροφή* σύμφωνα με την Εξ. (5β) γράφεται ως

$$T(x,t) = \frac{100}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{1}{s} \frac{\sinh\left(\kappa^{-1/2} s^{1/2} x\right)}{\sinh\left(\kappa^{-1/2} s^{1/2} l\right)} e^{st} ds \quad . \tag{12}$$

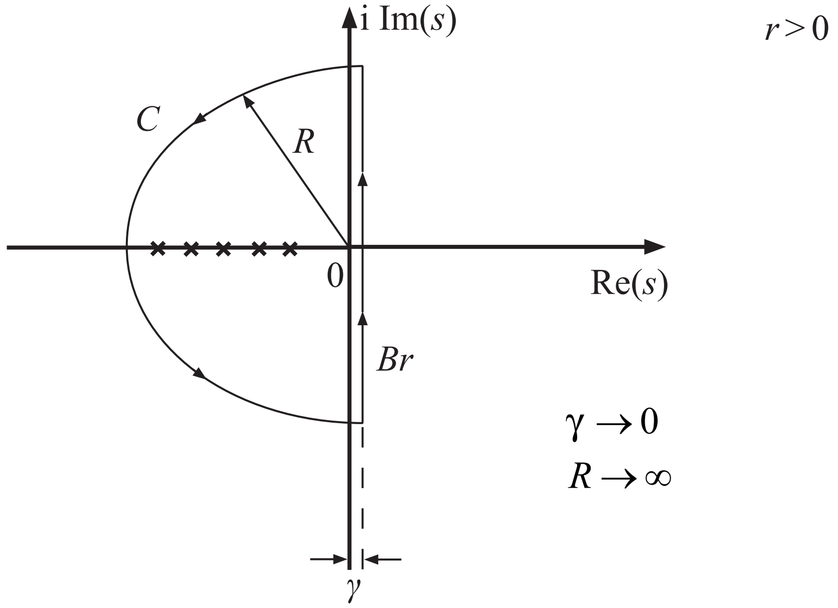
Ακολούθως, υπολογίζοντας τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της προς ολοκλήρωση συναρτήσεως και εφαρμόζοντας το σχετικό θεώρημα έχουμε

$$\left(\mathrm{Res.}\ @\ s = 0\right) = \frac{100x}{2\pi i l} \quad , \tag{13}$$

$$\left(\mathrm{Res.}\ @\ s = -\frac{n^2\pi^2\kappa}{l^2}\right) = (-1)^n \frac{100}{n\pi^2 i} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cdot \exp\left(-n^2\pi^2\kappa l^{-2} t\right), \quad \text{για } n = 1, 2, \ldots \quad , \tag{14}$$

$$T(x,t) = 2\pi i \sum \mathrm{Res.} = \frac{100x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{200}{n\pi} \cdot \sin\left(n\pi l^{-1} x\right) \cdot \exp\left(-n^2\pi^2\kappa l^{-2} t\right) \quad , \tag{15}$$

όπου η τελική έκφραση της Εξ. (15) προκύπτει με το κλείσιμο της καμπύλης ολοκληρώσεως στο αριστερό ημι–επίπεδο του πεδίου (μιγαδικού επιπέδου) του μετασχηματισμού Laplace.



Σημειώνεται ότι η συνεισφορά στο ολοκλήρωμα από τον ημικυκλικό δρόμο ολοκληρώσεως είναι μηδενική βάσει του λήμματος Jordan.

<u>Υπενθύμιση (λήμμα Jordan):</u>

$$\int_C \overline{f}(s) \cdot e^{st} ds \to 0 \quad ,$$

εάν $\overline{f}(s) = O\left(R^{-a}\right)$ επί της καμπύλης C, καθώς $R \to \infty$, για $a > 0$ και $t > 0$.

Παράδειγμα 2

Δίνεται το εξής πρόβλημα αρχικής τιμής της θερμικής αγωγιμότητας ράβδου απείρου μήκους

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \tag{1}$$

$$T(x,0) = m(x) \quad , \tag{2}$$

όπου η αρχική θερμοκρασία $m(x)$ θεωρείται δεδομένη. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση $T(x,t)$ για $-\infty < x < \infty,\ t > 0$.

Λύση

Το πρόβλημα θα επιλυθεί με την βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier ως προς την μεταβλητή x (θα μπορούσε όμως, *εναλλακτικά*, να εφαρμοστεί και ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace ως προς τη μεταβλητή t, ενώ αντί του μετασχηματισμού Fourier θα μπορούσε να εφαρμοστεί ο ισοδύναμος του αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace ως προς x).

Ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}dx \qquad \text{(ευθύς μετασχηματισμός)} \ , \tag{3α}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega \qquad \text{(αντίστροφος μετασχηματισμός)} \ . \tag{3β}$$

Εφαρμόζοντας την (3α) στην (1) λαμβάνουμε (με ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$$\begin{aligned} &\kappa\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial T}{\partial t}e^{-i\omega x}dx \Rightarrow \\ &\kappa\left\{\frac{\partial T}{\partial x}e^{-i\omega x}\bigg|_{x=-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial T}{\partial x}e^{-i\omega x}dx\right\} = \frac{\partial \hat{T}}{dt} \end{aligned} \tag{4}$$

όπου $\hat{T} \equiv \hat{T}(\omega,t)$, ενώ το ω θεωρείται ως παράμετρος.

Υποθέτοντας τώρα ότι $(\partial T/\partial x) \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$, ο πρώτος όρος της αγκύλης μηδενίζεται. Η συνθήκη αυτή καθώς $|x| \to \infty$ (δηλ. σε "απομακρυσμένες" θέσεις του μέσου) καλείται *συνθήκη κανονικότητας* (regularity condition) ή *συνθήκη ακτινοβολίας* (radiation condition) ή , απλώς, *συνθήκη στο άπειρο* (condition at infinity). Κατωτέρω, θα απαιτηθεί και μια δεύτερη συνθήκη κανονικότητας για να επιλυθεί το πρόβλημα.

Κατόπιν, ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες πάλι την (4) λαμβάνοντας

$$i\kappa\omega\left\{Te^{-i\omega x}\Big|_{x=-\infty}^{\infty} + i\omega\hat{T}\right\} = \frac{d\hat{T}}{dt} \ , \tag{5}$$

όπου υποθέτοντας περαιτέρω ότι $T \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$ (δεύτερη συνθήκη κανονικότητας), καταλήγουμε στην συνήθη Δ.Ε.

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = -\kappa\omega^2\hat{T} \ , \tag{6}$$

της οποίας η γενική λύση για $t > 0$ έχει την μορφή

$$\hat{T} = A \cdot \exp\left(-\kappa\omega^2 t\right) \quad , \tag{7}$$

όπου A είναι αυθαίρετη συνάρτηση της παραμέτρου ω. Αυτή, η αρχικώς άγνωστη συνάρτηση, θα προσδιορισθεί μέσω της αρχικής συνθήκης (2). Η τελευταία μετασχηματιζόμενη δίνει

$$\hat{T}\left(\omega, t = 0\right) = \hat{m}\left(\omega\right) \quad , \tag{8}$$

ενώ από τον συνδυασμό των (7) και (8) προκύπτει ότι $A = \hat{m}\left(\omega\right)$.

Ακολούθως, ο *αντίστροφος* μετασχηματισμός της λύσεως προκύπτει ως

$$\begin{aligned} T\left(x,t\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{m}\left(\omega\right) \cdot e^{-\kappa\omega^2 t} \cdot e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x - \kappa\omega^2 t} \hat{m}\left(\omega\right) d\omega \end{aligned} \tag{9}$$

Περαιτέρω, αφού μας δίνεται η $m\left(x\right)$ και *όχι ακριβώς* η $\hat{m}\left(\omega\right)$ χρησιμοποιούμε για την Εξ. (9) την εξής μορφή

$$\begin{aligned} T\left(x,t\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x - \kappa\omega^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} m\left(\xi\right) \cdot e^{-i\omega\xi} d\xi\right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} m\left(\xi\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(x-\xi\right) - \kappa\omega^2 t} d\omega\right) d\xi \end{aligned} \tag{10}$$

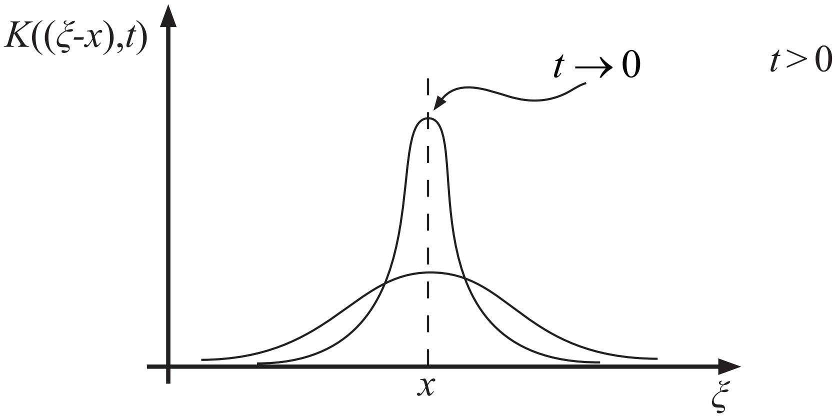
Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής και επικαμπύλιο ολοκλήρωση υπολογίζεται το “εσωτερικό” ολοκλήρωμα και η τελική έκφραση έχει την μορφή

$$T\left(x,t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} m\left(\xi\right) \cdot \frac{\exp\left[-\left(\xi - x\right)^2 / 4\kappa t\right]}{2\kappa^{1/2}\left(\pi t\right)^{1/2}} \, d\xi \quad . \tag{11}$$

Είναι ενδιαφέρουσα η παρατήρηση ότι η συνάρτηση του *πυρήνα*

$$K\left(\left(\xi - x\right), t\right) \equiv \frac{\exp\left[-\left(\xi - x\right)^2 / 4\kappa t\right]}{2\kappa^{1/2}\left(\pi t\right)^{1/2}} \quad , \tag{12}$$

έχει την συμπεριφορά που δείχνει το ακόλουθο σχήμα



Πράγματι, ο πυρήνας K είναι μια κατανομή Gauss ως προς το σημείο $\xi = x$. Το εμβαδόν της περιοχής κάτω από κάθε τέτοια καμπύλη (για διάφορα t) είναι πάντοτε ίσο με την μονάδα και ο πυρήνας ταυτίζεται με την γενικευμένη συνάρτηση Dirac δέλτα στο όριο $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi) \cdot K\left((\xi - x), t\right) d\xi = m(x) \quad , \tag{13}$$

όπως *όντως* απαιτείται από την συνθήκη (2).