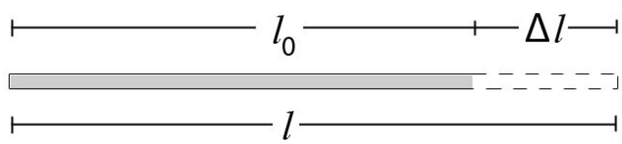
Σημειώσεις Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου (Τεύχος Α)

Κινηματική Ανάλυση σε Τρεις Διαστάσεις

1. Τροπές σε μία διάσταση

Θεωρούμε καταρχήν μία ράβδο αρχικού μήκους l_0, στην οποία επιβάλλεται παραμόρφωση Δl με αποτέλεσμα το τελικό μήκος αυτής να ισούται με l.



Το ζητούμενο είναι να ποσοτικοποιηθεί η παραμόρφωση της ράβδου και ενώ οι μόνες διαθέσιμες μεταβλητές είναι το αρχικό και το τελικό μήκος της ράβδου, υπάρχουν περισσότερες από μία εναλλακτικές. Καταρχήν ορίζουμε την μήκυνση της ράβδου ως

$$\lambda \equiv \frac{l}{l_0}$$

Στην απαραμόρφωτη κατάσταση η μήκυνση ισούται με τη μονάδα, στην περίπτωση επιμήκυνσης είναι μεγαλύτερη αυτής και στην περίπτωση βράχυνσης μικρότερη της μονάδας.

Με βάση τα παραπάνω η τροπή μπορεί να οριστεί με τους παρακάτω τέσσερεις τρόπους:

- **Μηχανική τροπή** $\quad \varepsilon \equiv \dfrac{l-l_0}{l_0} = \lambda - 1$
- **Φυσική τροπή** $\quad \eta \equiv \dfrac{l-l_0}{l} = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$
- **Τροπή κατά Lagrange:** $\quad E \equiv \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l^2-l_0^2}{l_0^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right)$
- **Τροπή κατά Euler:** $\quad E^* \equiv \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l^2-l_0^2}{l^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda^2}\right)$

Είναι εμφανής η αναλογία μεταξύ τροπής κατά Lagrange και μηχανικής τροπής καθώς και μεταξύ τροπής κατά Euler και φυσικής τροπής.

2. Διανύσματα θέσης και μετατόπισης σε τρεις διαστάσεις

Θεωρούμε την αρχική και την παραμορφωμένη κατάσταση ενός στερεού σώματος και επικεντρωνόμαστε στην θέση και μετατόπιση ενός υλικού σημείου του. Εάν $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

είναι μια βάση του καρτεσιανού χώρου, τότε στην αρχική κατάσταση ένα δεδομένο υλικό σημείο θα βρίσκεται στη θέση P_0 με συντεταγμένες

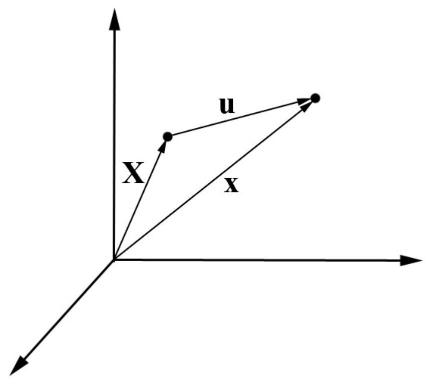
$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$$

ή αλλιώς $P_0 = (X_1, X_2, X_3)$.

Στην παραμορφωμένη κατάσταση το ίδιο υλικό σημείο θα βρίσκεται πλέον στη θέση P με συντεταγμένες

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

ή αλλιώς $P = (x_1, x_2, x_3)$.



Το σημείο υπό εξέταση επομένως χαρακτηρίζεται στην παραμορφωμένη κατάσταση από τις υλικές συντεταγμένες (X_1, X_2, X_3) και τις χωρικές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3).

Ας εξετάσουμε τώρα την μετατόπιση του υλικού σημείου, η οποία περιγράφεται από το διάνυσμα $\mathbf{u}$, το οποίο συνδέει τα σημεία P_0 και P. Η μετατόπιση θα δίνεται επομένως από τη σχέση

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

ή αλλιώς

$$u_k = x_k - X_k$$

Παράδειγμα

Μετά την παραμόρφωση σώματος οι χωρικές συντεταγμένες του δίνονται ως συνάρτηση των αρχικών ως εξής:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \\ x_2 &= X_2 + AX_3 \\ x_3 &= AX_2 + X_3 \end{aligned}$$

όπου το A είναι σταθερά. Να υπολογιστούν τα διανύσματα μετατόπισης σε υλικές και χωρικές συντεταγμένες. Επίσης να προσδιοριστεί η θέση μετά την παραμόρφωση των υλικών σημείων τα οποία αρχικά συνιστούν την κυκλική επιφάνεια $X_1 = 0$, $X_2^2 + X_3^2 = 1/(1 - A^2)$, εάν $A = 1/2$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

επομένως

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - X_1 = 0 \\ u_2 &= x_2 - X_2 = AX_3 \\ u_3 &= x_3 - X_3 = AX_2 \end{aligned}$$

σε υλικές συντεταγμένες. Οι χωρικές συντεταγμένες ως συνάρτηση των υλικών εκφράζονται ως

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

οπότε αντιστρέφοντας

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-A^2} \begin{bmatrix} 1-A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A \\ 0 & -A & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση που εκφράζει την μετατόπιση, λαμβάνουμε την μετατόπιση ως συνάρτηση των υλικών συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - X_1 = 0 \\ u_2 &= x_2 - X_2 = AX_3 = \frac{A}{1-A^2}\left(-Ax_2 + x_3\right) \\ u_3 &= x_3 - X_3 = AX_2 = \frac{A}{1-A^2}\left(x_2 - Ax_3\right) \end{aligned}$$

Για την κυκλική επιφάνεια αντικαθιστώντας απευθείας

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 \\ X_2 &= \frac{1}{1-A^2}\left(x_2 - Ax_3\right) \\ X_3 &= \frac{1}{1-A^2}\left(-Ax_2 + x_3\right) \end{aligned}$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} & x_1 = 0 \\ & \left(1+A^2\right)x_2^2 - 4Ax_2x_3 + \left(1+A^2\right)x_3^2 = \left(1-A^2\right) \end{aligned}$$

Θέτοντας $A = 1/2$ προκύπτει

$$\begin{aligned} & x_1 = 0 \\ & 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2 = 3 \end{aligned}$$

3. Περιγραφές κατά Euler και κατά Lagrange

Κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης η κίνηση των σωματιδίων του υλικού μέσου μπορεί να περιγραφεί είτε σε υλικές είτε σε χωρικές συντεταγμένες, οδηγώντας έτσι σε δύο διαφορετικές περιγραφές.

Περιγραφή κατά Lagrange: εκφράζει την παρούσα θέση του σωματιδίου ως συνάρτηση της αρχικής του θέσης τη χρονική στιγμή $t=0$:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$$

ή

$$x_i = x_i\left(X_1, X_2, X_3, t\right)$$

Η περιγραφή κατά Lagrange είναι γνωστή και ως υλική περιγραφή.

Περιγραφή κατά Euler: εκφράζει την αρχική θέση του σωματιδίου ως συνάρτηση της θέσης του κατά την παρούσα χρονική στιγμή:

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$$

ή

$$X_i = X_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$$

Όπου οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι συντεταγμένες του σωματιδίου στην παρούσα θέση του. Η περιγραφή κατά Euler είναι γνωστή και ως χωρική περιγραφή.

Στην υλική περιγραφή η προσοχή εστιάζεται σε δεδομένη ποσότητα μάζας την οποία παρακολουθεί ο παρατηρητής στην κίνησή της, ενώ στην χωρική περιγραφή η προσοχή εστιάζεται σε δεδομένη περιοχή του χώρου.

Προκειμένου οι δύο περιγραφές να αποτελούν μια ένα προς ένα απεικόνιση θα πρέπει η ορίζουσα της Ιακωβιανής να είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή θα πρέπει

$$|J| = \left|\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right| \neq 0$$

Παράδειγμα: Περιγραφές κατά Euler και κατά Lagrange

Η περιγραφή μιας παραμόρφωσης κατά Lagrange δίνεται από τις σχέσεις

$$x_1 = X_1 + X_3\left(e^2-1\right)$$

$$x_2 = X_2 + X_3\left(e^2-e^{-2}\right)$$

$$x_3 = e^2 X_3$$

Να δειχθεί ότι η Ιακωβιανή δεν μηδενίζεται και να δοθεί η περιγραφή κατά Euler.

Λύση

Η Ιακωβιανή είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \left(e^2-1\right) \\ 0 & 1 & \left(e^2-e^{-2}\right) \\ 0 & 0 & e^2 \end{vmatrix} = e^2 \neq 0$$

Αντιστρέφοντας τον πίνακα του μετασχηματισμού προκύπτει

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(e^2-1\right) \\ 0 & 1 & \left(e^2-e^{-2}\right) \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \left(e^{-2}-1\right) \\ 0 & 1 & \left(e^{-4}-1\right) \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix}$$

επομένως

$$X_1 = x_1 + X_3\left(e^{-2}-1\right)$$
$$X_2 = x_2 + x_3\left(e^{-4}-1\right)$$
$$X_3 = e^{-2}x_3$$

4. Βαθμίδες θέσης

Η βαθμίδα της θέσης αποτελεί μέτρο της παραμόρφωσης του σώματος. Η παραγώγιση των τελικών συντεταγμένων ως προς τις αρχικές δίνει την υλική κλίση της θέσης

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα ορίζεται η χωρική παράγωγος της θέσης

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Τα παραπάνω μέτρα παραμόρφωσης συνδέονται με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik}$$

και ισχύει

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-1}$$

Παράδειγμα

Κινούμενο σώμα εισέρχεται σε δεδομένο θερμοκρασιακό πεδίο. Η κίνηση του σώματος περιγράφεται ως εξής $x_1 = X_1 + ktX_2$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$. Εάν το θερμοκρασιακό πεδίο δίνεται από την χωρική περιγραφή $\theta = \lambda\left(x_1 + x_2\right)$, τότε:

(α) Να προσδιοριστεί η υλική περιγραφή της θερμοκρασίας και (β) Να προσδιοριστούν η ταχύτητα και ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας για υλικά σημεία.

Λύση

(α) Με απλή αντικατάσταση έχουμε

$$\theta = \lambda\left(x_1 + x_2\right) = \lambda\left(X_1 + ktX_2 + X_2\right) = \lambda\left(X_1 + \left(kt+1\right)X_2\right)$$

(β) Για δεδομένο υλικό σημείο που αντιστοιχεί σε κάποιο $\mathbf{X}$ η ταχύτητά του θα είναι

$$v_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{X_j}$$

οπότε $v_1 = kX_2$, $v_2 = v_3 = 0$ σε υλική περιγραφή, ενώ σε χωρική περιγραφή $v_1 = kx_2$, $v_2 = v_3 = 0$.

Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας για ένα υλικό σημείο θα είναι

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{X_j} = \lambda k X_2 = \lambda k x_2$$

5. Βαθμίδες μετατόπισης

Κατά αντιστοιχία με τα παραπάνω η υλική βαθμίδα μετατόπισης ορίζεται ως

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial\left(x_i - X_i\right)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

ενώ η χωρική βαθμίδα μετατόπισης ορίζεται ως

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(x_i - X_i\right)}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \mathbf{I} - \mathbf{H}$$

Παράδειγμα

Ένα τοπίο μετατοπίσεων δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{u} = X_1 X_3^2 \mathbf{e}_1 + X_1^2 X_2 \mathbf{e}_2 + X_2^2 X_3 \mathbf{e}_3$$

Να υπολογιστεί η υλική παράγωγος θέσης και η υλική παράγωγος μετατόπισης.

Λύση

Με απευθείας παραγώγιση προκύπτει η υλική παράγωγος της μετατόπισης:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} X_3^2 & 0 & 2X_1X_3 \\ 2X_1X_2 & X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2X_3 & X_2^2 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, εφόσον $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{X}$

$$\mathbf{x} = X_1\left(1 + X_3^2\right)\mathbf{e}_1 + X_2\left(1 + X_1^2\right)\mathbf{e}_2 + X_3\left(1 + X_2^2\right)\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 1+X_3^2 & 0 & 2X_1X_3 \\ 2X_1X_2 & 1+X_1^2 & 0 \\ 0 & 2X_2X_3 & 1+X_2^2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι όντως ισχύει $\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$.

6. Τανυστές Παραμόρφωσης

6.1 Τανυστής παραμόρφωσης κατά Cauchy

Ο τανυστής παραμόρφωσης κατά Cauchy, ο οποίος εισήχθη από τον Cauchy το 1827, συμβολίζεται ως $\mathbf{B}^{-1}$ ή $\mathbf{c}$ και εκφράζει το τετράγωνο του αρχικού μήκους $(dX)^2$ ενός στοιχείου $d\mathbf{x}$ στην παραμορφωμένη κατάσταση.
Το τετράγωνο του αρχικού μήκους είναι

$$(dX)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_i dX_i$$

το οποίο μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j$$

οπότε

$$(dX)^2 = dX_i dX_i = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} dx_i \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = B_{ij}^{-1} dx_i dx_j$$

Μέσω της παραπάνω σχέσης ορίζεται η ποσότητα

$$B_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$$

ως ο τανυστής παραμόρφωσης κατά Cauchy.

6.2 Τανυστής παραμόρφωσης κατά Green

Ο τανυστής παραμόρφωσης κατά Green, ο οποίος εισήχθη από τον Green το 1841, συμβολίζεται ως $\mathbf{B}$ ή $\mathbf{C}$ και εκφράζει το τετράγωνο του νέου μήκους $(dx)^2$ ενός στοιχείου $d\mathbf{X}$ στην παραμορφωμένη κατάσταση. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται τώρα σε υλικές συντεταγμένες

$$(dx)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i$$

οι οποίες μπορούν τώρα να εκφραστούν στη μορφή

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$$

Με βάση το παραπάνω

$$(dx)^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} dX_i \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j = C_{ij} dX_i dX_j$$

όπου

$$C_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

Ο παραπάνω τανυστής είναι γνωστός ως τανυστής παραμόρφωσης κατά Green.

Από απλή παρατήρηση προκύπτει ότι

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}$$

Γεγονός αναμενόμενο, εφόσον

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-1}$$

Παράδειγμα

Ένα συνεχές σώμα υποβάλλεται στην παραμόρφωση

$$x_1 = X_1$$
$$x_2 = X_2 + AX_3$$
$$x_3 = AX_2 + X_3$$

Όπου το A είναι μια σταθερά. Να υπολογιστεί ο τανυστής παραμορφώσεων κατά Green $\mathbf{C}$.

Λύση

Καταρχήν υπολογίζουμε τον τανυστή $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix}$$

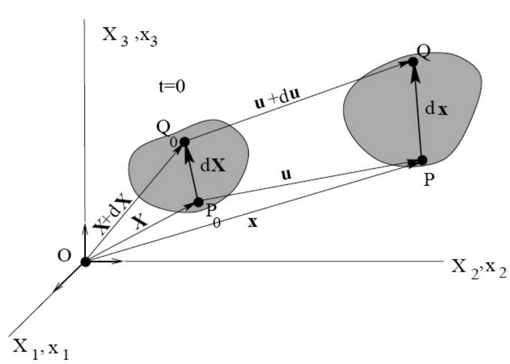
Επομένως

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \Rightarrow$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A \\ 0 & A & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix}$$

7. Πεπερασμένες Τροπές

Η έννοια της τροπής εισάγεται ως $(dx)^2 - (dX)^2$ και αποτελεί μέτρο της παραμόρφωσης. Παρακάτω παρατίθενται οι διαφορετικές περιγραφές της, αρχικά για την περίπτωση πεπερασμένων και όχι απειροστών τροπών.



7.1 Τανυστής τροπών κατά Lagrange/Green

Στην περιγραφή κατά Lagrange γίνεται χρήση του τανυστή παραμορφώσεων κατά Green προκειμένου η ζητούμενη ποσότητα να εκφραστεί ως συνάρτηση των υλικών συντεταγμένων. Έχουμε

$$\left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2 = C_{ij}dX_i dX_j - \delta_{ij}dX_i dX_j = d\mathbf{X}^T\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}\right)d\mathbf{X}$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή δευτέρας τάξης

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}\right)$$

ως τον τανυστή πεπερασμένων τροπών κατά Lagrange (ή κατά Green), οπότε

$$\left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2 = 2d\mathbf{X}^T\mathbf{E}d\mathbf{X}$$

Προκειμένου να εκφράσουμε τον τανυστή τροπών κατά Lagrange ως συνάρτηση των μετατοπίσεων, με απλές αντικαταστάσεις φτάνουμε στην μορφή

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί ο τανυστής πεπερασμένης τροπής κατά Lagrange για το προηγούμενο παράδειγμα.

Λύση

Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+A^2 & 2A \\ 0 & 2A & 1+A^2 \end{bmatrix}$$

επομένως

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & 2A \\ 0 & 2A & A^2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι ο τανυστής είναι συμμετρικός.

7.2 Τανυστής τροπών κατά Euler/Almansi

Εναλλακτικά η διαφορά $\left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2$ μπορεί να εκφραστεί ως προς τις χωρικές συντεταγμένες

$$\left(dx\right)^2 - \left(dX\right)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)dx_i dx_j = \left(\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}\right)dx_i dx$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή δευτέρας τάξης

$$E_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{-1}\right)$$

ως τον τανυστή πεπερασμένων τροπών κατά Euler (ή κατά Almansi), οπότε

$$(dx)^2-(dX)^2=2d\mathbf{x}^T\mathbf{E}^*d\mathbf{x}$$

Προκειμένου να εκφράσουμε τον τανυστή τροπών κατά Euler ως συνάρτηση των μετατοπίσεων, με απλές αντικαταστάσεις φτάνουμε στην μορφή

$$E_{ij}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)$$

8. Απειροστές Τροπές – Θεωρία Μικρών Παραμορφώσεων

Στην θεωρία μικρών παραμορφώσεων γίνεται η υπόθεση ότι οι συνιστώσες της βαθμίδας των μετατοπίσεων είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με τη μονάδα. Με την υπόθεση των μικρών παραμορφώσεων οι τανυστές πεπερασμένων παραμορφώσεων εκφυλίζονται σε τανυστές απειροστών παραμορφώσεων.

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο είναι να υπολογιστεί η ποσότητα $\varepsilon+\varepsilon^2$. Για $\varepsilon=10^{-1}$ και για $\varepsilon=10^{-3}$ λαμβάνουμε αντίστοιχα $\varepsilon+\varepsilon^2=0.11$ και $\varepsilon+\varepsilon^2=0.001001\approx 0.001$.

8.1 Τανυστής απειροστών τροπών κατά Lagrange

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τανυστή πεπερασμένων τροπών και υποθέτοντας ότι αναφερόμαστε σε μικρές παραμορφώσεις προκύπτει

$$E_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

Ο τανυστής που προκύπτει είναι ο τανυστής απειροστών τροπών κατά Lagrange. Για τις επιμέρους συνιστώσες του προκύπτει:

$$E_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\qquad E_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\qquad E_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)$$

$$E_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}+\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)\qquad E_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\qquad E_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)$$

$$E_{31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}+\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)\qquad E_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)\qquad E_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$

8.2 Τανυστής απειροστών τροπών κατά Euler

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τανυστή πεπερασμένων τροπών και υποθέτοντας ότι αναφερόμαστε σε μικρές παραμορφώσεις προκύπτει

$$E_{ij}^*=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Ο τανυστής που προκύπτει είναι ο τανυστής απειροστών τροπών κατά Euler. Για τις επιμέρους συνιστώσες του προκύπτει:

$$E_{11}^{*}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\qquad E_{12}^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\qquad E_{13}^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$$

$$E_{21}^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\qquad E_{22}^{*}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\qquad E_{23}^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)$$

$$E_{31}^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)\qquad E_{32}^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\qquad E_{33}^{*}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Παράδειγμα

Ένα πεδίο μετατοπίσεων δίνεται από τις σχέσεις

$$x_1 = X_1 + AX_2$$
$$x_2 = X_2 + AX_3$$
$$x_3 = X_3 + AX_1$$

όπου το A είναι μια σταθερά. Να υπολογιστούν οι τανυστές τροπών κατά Euler και κατά Lagrange και να συγκριθούν για την περίπτωση που το A είναι πολύ μικρό.

Λύση

Οι μετατοπίσεις σε υλική περιγραφή μπορούν να υπολογιστούν ως

$$u_1 = x_1 - X_1 = AX_2$$
$$u_2 = x_2 - X_2 = AX_3$$
$$u_3 = x_3 - X_3 = AX_1$$

Επομένως

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j}=\begin{bmatrix}0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\\ A & 0 & 0\end{bmatrix}$$

οπότε

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & A\\ A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\\ A & 0 & 0\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & A & A\\ A & 0 & A\\ A & A & 0\end{bmatrix}$$

Προκειμένου να προσδιοριστεί ο τανυστής κατά Euler απαιτούνται οι μετατοπίσεις σε χωρικές συντεταγμένες.

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & A & 0\\ 0 & 1 & A\\ A & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{1+A^3}\begin{bmatrix}1 & -A & A^2\\ A^2 & 1 & -A\\ -A & A^2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

Επομένως οι μετατοπίσεις εκφράζονται ως

$$u_1 = x_1 - X_1 = x_1 - \frac{1}{1+A^3}\left(x_1 - Ax_2 + A^2x_3\right) = \frac{A}{1+A^3}\left(A^2x_1 + x_2 - Ax_3\right)$$
$$u_2 = x_2 - X_2 = x_2 - \frac{1}{1+A^3}\left(A^2x_1 + x_2 - Ax_3\right) = \frac{A}{1+A^3}\left(-Ax_1 + A^2x_2 + x_3\right)$$
$$u_3 = x_3 - X_3 = x_3 - \frac{1}{1+A^3}\left(-Ax_1 + A^2x_2 + x_3\right) = \frac{A}{1+A^3}\left(x_1 - Ax_2 + A^2x_3\right)$$

Και άρα

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{A}{1+A^3}\begin{bmatrix} A^2 & 1 & -A \\ -A & A^2 & 1 \\ 1 & -A & A^2 \end{bmatrix}$$

Πλέον μπορεί να υπολογιστεί το ζητούμενο:

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}\frac{A}{1+A^3}\left(\begin{bmatrix} A^2 & -A & 1 \\ 1 & A^2 & -A \\ -A & 1 & A^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^2 & 1 & -A \\ -A & A^2 & 1 \\ 1 & -A & A^2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+A^3}\begin{bmatrix} 2A^3 & A-A^2 & A-A^2 \\ A-A^2 & 2A^3 & A-A^2 \\ A-A^2 & A-A^2 & 2A^3 \end{bmatrix}$$

Για πολύ μικρές τιμές του A

$$\mathbf{E}^* \approx \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

9. Γραμμικές τροπές και τανυστές στροφής

Οι συνιστώσες των τανυστών τροπών είναι ποσοτικά μέτρα σχετικής μετατόπισης μεταξύ γειτονικών σημείων του υλικού μέσου. Ωστόσο δεν αντιστοιχούν όλα τα είδη σχετικής μετατόπισης σε τροπές. Εάν το σώμα κινείται ως στερεό σώμα, η τυχόν περιστροφική του κίνηση προκαλεί σχετικές μετατοπίσεις που δεν σχετίζονται με παραμορφώσεις. Επομένως είναι σκόπιμο να διαχωριστούν οι μετατοπίσεις που δεν οδηγούν σε παραμορφώσεις. Θα περιοριστούμε σε μικρές παραμορφώσεις.

Θεωρούμε δύο γειτονικά σημεία P_0 και Q_0, τα οποία στην παραμορφωμένη κατάσταση βρίσκονται στη θέση P και Q αντίστοιχα. Οι μετατοπίσεις τους δίνονται από τα διανύσματα $\mathbf{u}^P$ και $\mathbf{u}^Q$ αντίστοιχα, ενώ η σχετική τους μετατόπιση δίνεται από το διάνυσμα

$$du_i = u_i^P - u_i^Q$$

Το παραπάνω διάνυσμα ονομάζεται διάνυσμα σχετικής μετατόπισης του υλικού σημείου που αρχικά βρισκόταν στο P_0, ως προς το υλικό σημείο που αρχικά βρισκόταν στο Q_0.

9.1 Περιγραφή κατά Lagrange

Προχωράμε σε ανάπτυξη κατά Taylor αγνοώντας τους όρους υψηλότερης τάξης, μια και αναφερόμαστε σε μικρές παραμορφώσεις:

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) dX_j$$

Ο υλικός τανυστής της παραμόρφωσης μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή:

$$du_i = \left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)}_{E_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)}_{W_{ij}} \right] dX_j$$

Είναι γνωστό από τα προηγούμενα ότι

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Μπορεί πλέον να εισαχθεί και ο τανυστής απειροστών στροφών κατά Lagrange

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

ο οποίος αναλυτικά μπορεί να γραφεί ως

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} - \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} - \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση που $E_{ij} = 0$ σε μια περιοχή του σημείου P_0, η μετατόπιση στο συγκεκριμένο σημείο θα είναι μια στροφή στερεού σώματος. Η ίδια πληροφορία μπορεί να εκφραστεί και με την μορφή ενός διανύσματος στροφής ως εξής:

$$w_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{kj} = \frac{1}{2}\mathbf{curl_X\ u}$$

9.2 Περιγραφή κατά Euler

Προχωράμε κατά αντιστοιχία με την περιγραφή κατά Lagrange. Άρα

$$du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j$$

Ο χωρικός τανυστής της παραμόρφωσης μπορεί να αναλυθεί κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή:

$$du_i = \left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{E^*_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Omega_{ij}} \right] dx_j$$

Επομένως ο τανυστής απειροστών στροφών κατά Euler είναι

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ο οποίος αναλυτικά μπορεί να γραφεί ως

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Η ίδια πληροφορία μπορεί να εκφραστεί και με την μορφή ενός διανύσματος στροφής ως εξής:

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{kj} = \frac{1}{2}\mathbf{curl}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{u}$$

Το εν λόγω διάνυσμα ονομάζεται διάνυσμα στροφής κατά Euler.

Παράδειγμα

Ένα πεδίο μετατοπίσεων δίνεται από τις σχέσεις

$$u_1 = X_1^2 X_2$$
$$u_2 = X_2 - X_3^2$$
$$u_3 = X_2^2 X_3$$

Να προσδιοριστεί το διάνυσμα σχετικής μετατόπισης στην διεύθυνση $-X_2$ στο σημείο $P(1,2,-1)$. Προσδιορίστε τις σχετικές μετατοπίσεις $\mathbf{u}_{Q_i} - \mathbf{u}_P$ για $Q_1(1,1,-1)$, $Q_2(1,3/21,-1)$, $Q_3(1,7/4,-1)$ και $Q_4(1,15/8,-1)$.

Λύση

Υπολογίζουμε καταρχήν την υλική βαθμίδα της παραμόρφωσης

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 2X_1X_2 & X_1^2 & 0 \\ 0 & 1 & -2X_3 \\ 0 & 2X_2X_3 & X_2^2 \end{bmatrix}$$

άρα

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Οι σχετικές μετατοπίσεις μπορούν να βρεθούν με απευθείας αντικατάσταση στη σχέση που εκφράζει το πεδίο της μετατόπισης.

$$\mathbf{u}_{Q_1} - \mathbf{u}_P = (1,0,-1) - (2,1,-4) = (-1,-1,3)$$

$$\mathbf{u}_{Q_2} - \mathbf{u}_P = (3/2,1/2,-9/4) - (2,1,-4) = \frac{1}{2}(-1,-1,3.5)$$

$$\mathbf{u}_{Q_3} - \mathbf{u}_P = (7/4,3/4,49/16) - (2,1,-4) = \frac{1}{4}(-1,-1,3.75)$$

$$\mathbf{u}_{Q_4} - \mathbf{u}_P = (15/8,7/8,-225/64) - (2,1,-4) = \frac{1}{8}(-1,-1,3.875)$$

Παρατηρούμε ότι όσο το σημείο Q_i πλησιάζει στο P η διεύθυνση της σχετικής μετατόπισης τείνει στο διάνυσμα $d\mathbf{u}$.

Παράδειγμα

Ένα πεδίο παραμορφώσεων δίνεται από τη σχέση

$$u_1 = (x_1 - x_3)^2$$

$$u_2 = (x_2 + x_3)^2$$

$$u_3 = -x_1 x_2$$

Υπό την υπόθεση μικρών παραμορφώσεων $\mathbf{E} = \mathbf{E}^*$, να υπολογιστούν ο τανυστής απειροστών τροπών, ο τανυστής απειροστών στροφών και το διάνυσμα στροφής στο σημείο $P(0,2,-1)$.

Λύση

Η βαθμίδα της μετατόπισης είναι

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_3) & 0 & -2(x_1 - x_3) \\ 0 & 2(x_2 + x_3) & 2(x_2 + x_3) \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα στο σημείο υπό εξέταση

$$\mathrm{A} = \left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο τανυστής απειροστών τροπών θα είναι

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και ο τανυστής απειροστών στροφών θα είναι

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα στροφών θα είναι

$$\mathbf{w} = -W_{23}\mathbf{e}_1 - W_{31}\mathbf{e}_2 - W_{12}\mathbf{e}_3 = -1\mathbf{e}_1$$