* Δίνεται η κίνηση των σημείων ενός συνεχούς μέσου:

$x_1 = (1+b^2t^2)X_1$

$x_2 = X_2$

$x_3 = X_3$

N.B. οι ταχύτητες κ' οι επιταχύνσεις κατά Lagrange κ' κατά Euler

Λύση:

$v_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = 2b^2 t X_1$, $v_2 = v_3 = 0$ (Lagrange)

$a_1 = 2b^2 X_1$, $a_2 = a_3 = 0$

$X_1 = \frac{x_1}{1+b^2t^2} \Rightarrow v_1 = 2b^2 t \cdot \frac{x_1}{1+b^2t^2}$ (Euler)

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_2}}^{0} + v_3 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}}^{0} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{2b^2 t x_1}{1+b^2t^2}\right) = \ldots = \frac{2b^2 x_1}{1+b^2t^2}$$

* Δίνεται η κίνηση των σημείων ενός συνεχούς μέσου

$x_1 = X_1 + 2X_2 t^2$

$x_2 = X_2 + 2X_1 t^2$

$x_3 = X_3$

N.B. οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 1{,}5$ sec για το σημείο που την χρ. στιγμή $t=1$ sec βρίσκεται στη θέση $(2,3,4)$

Λύση:

$t=0$: $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$

$u_1 = 4X_2 t$, $u_2 = 4X_1 t$, $u_3 = 0$

$a_1 = 4X_2$, $a_2 = 4X_1$, $a_3 = 0$ (ανεξάρτητα του χρόνου)

$u_1\big|_{t=1,5} = 4\mathbb{X}_2 \cdot 1,5 = 6\mathbb{X}_2$, $u_2\big|_{t=1,5} = 6\mathbb{X}_1$, $u_3\big|_{t=1,5} = 0.$

$$t=1: \left.\begin{aligned} 2 &= \mathbb{X}_1 + 2\mathbb{X}_2 \\ 3 &= \mathbb{X}_2 + 2\mathbb{X}_1 \\ 4 &= \mathbb{X}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathbb{X}_1 &= 4/3 \\ \mathbb{X}_2 &= 1/3 \\ \mathbb{X}_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_2 &= 8 \\ u_3 &= 0 \end{aligned}\right|_{t=1,5\,sec.}$$

* $$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2}{2}e^{t} + \frac{\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}e^{-t} \\ x_2 &= \frac{\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2}{2}e^{t} - \frac{\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}e^{-t} \\ x_3 &= \mathbb{X}_3 \end{aligned}\right\}$$ Ν.β. οι ταχύτητες κ' οι επιταχύνσεις κατά Lagrange κ' κατά Euler.

<u>Λύση:</u>

$u_1 = \frac{\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2}{2}e^{t} - \frac{\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}e^{-t}$, $u_2 = \frac{\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2}{2}e^{t} + \frac{\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}e^{-t}$, $u_3 = 0$ (Lagrange)

$a_1 = \frac{\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2}{2}e^{t} + \frac{\mathbb{X}_1-\mathbb{X}_2}{2}e^{-t} = x_1$, $a_2 = x_2$, $a_3 = 0$

$u_1 = x_2$, $a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 + 0 + u_2 \Rightarrow a_1 = x_1$ (Euler)

$u_2 = x_1$, $a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 + x_2 + 0 \Rightarrow a_2 = x_2$

$u_3 = 0$, $a_3 = 0$

* Δίνεται η περιγραφή κατά Lagrange ενός μονοδιάστατου συνεχούς:

$x = \mathbb{X}\cdot(1+f(t))^{(1)}$, $f(0)=0$.

Έστω η ταχύτητα κατά Euler: $v^E(x,t) = xt$.

Ν.β. η $f(t)$ κ' η αντίστροφη κίνηση.

<u>Λύση:</u>

$\frac{\partial x}{\partial t} = \mathbb{X}\cdot\frac{Df}{Dt}^{(1)} = \frac{x}{1+f}\cdot\frac{Df}{Dt} = v^E(x,t) = xt \Rightarrow \frac{x}{1+f}\frac{df}{dt} = x t \Rightarrow \frac{df}{1+f} = t\,dt$

$\Rightarrow \ln(1+f) = \frac{t^2}{2} + A \Rightarrow 1+f = c\cdot e^{t^2/2} \Rightarrow f(t) = c\cdot e^{t^2/2} - 1$, $f(0) = c-1 = 0 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow f(t) = e^{t^2/2} - 1$, $x = \mathbb{X}\cdot e^{t^2/2}$

Μηχανική Συνεχούς

Σε χωρ. πεδ. η ΑΔΘ παίρνει την ακόλουθη μορφή:
(Θ. μεταφοράς Reynolds): $\frac{D}{Dt}\left(\int_{x_a}^{x_b}\rho(x,t)\cdot v(x,t)dx\right) =$
$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_a}^{x_b}\rho v dx + \rho v^2\Big|_{x_a}^{x_b}$ (1)

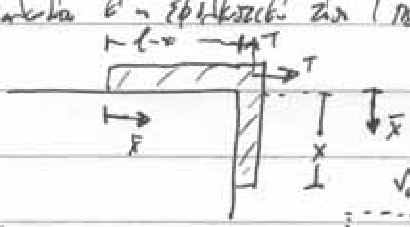
η ΑΔΘ σε χωρική περιγραφή έχει τη μορφή:
$\sigma(x,t)\Big|_{x_a}^{x_b} + \int_{x_a}^{x_b} f(x,t)dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{x_a}^{x_b}\rho v dx\right) + \rho v^2\Big|_{x_a}^{x_b}$ (2)

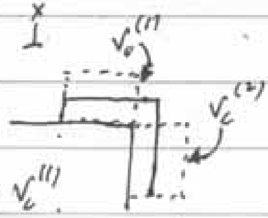
Προσοχή στα αντίστοιχα αποτελέσματα:
$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho F dV = \int_V \frac{\partial(\rho F)}{\partial t} dV$

ενώ

$\frac{D}{Dt}\int_V \rho F dV = \int_V \rho \frac{DF}{Dt} dV$

Άσκηση: Ομογενές καλώδιο μήκους ℓ, μάζας m γλιστρά προς τα κάτω, λόγω βαρύτητας. Αρχικά ($t=0$) το καλώδιο βρίσκεται σε μήκος x_0. Ν.δ. η εξίσωση του καλωδίου και η εφελκυστική τάση T που αναπτύσσεται στο σημείο της γωνίας.





1ος: Όγκος ελέγχου $V_c^{(1)}$
Αποτελείται η περιοχή $V_c^{(1)}$.
Στο τμήμα αυτό η T δρα στο δεξιό άκρο, ενώ δεν υπάρχουν καθόλου δυνάμεις. Από ΑΔΘ$^{(2)}$ $\Rightarrow$ $\sigma(\bar{x},t)\Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=\ell-x} + 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{\ell}(\ell-x)\dot{x}\right) + \frac{m}{\ell}\dot{x}^2\, 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow T = \frac{m}{\ell}(-\dot{x})\dot{x} + \frac{m}{\ell}(\ell-x)\ddot{x} + \frac{m}{\ell}\dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{m}{\ell}(\ell-x)\ddot{x}$ (4)

Όγκος Ελέγχου $\overline{\Sigma}^{(2)}$

Απομονώνοντας την περιοχή $V^{(2)}$: ΑΔΟ $\Rightarrow \sigma(\bar{x},t)\Big|_{\bar{y}=0}^{\bar{x}=x} + \left(\frac{m}{\ell}x\right)g = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{\ell}x\cdot\dot{x}\right) - \frac{m}{\ell}\dot{x}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -T + \frac{m}{\ell}xg = \frac{m}{\ell}x\ddot{x}$ (6)

(4), (6) $\Rightarrow \ddot{x} - \frac{g}{\ell}x = 0 \Rightarrow x = C_1 e^{(g/\ell)^{1/2}t} + C_2 e^{-(g/\ell)^{1/2}t}$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 &\Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2}\left[e^{\sqrt{g/\ell}\,t} + e^{-\sqrt{g/\ell}\,t}\right], \quad T = \frac{m}{\ell}(\ell - x)\left(\frac{g}{\ell}x\right)$$