## ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (2) 19/10/2004

**3)** Θεωρήστε ένα σύστημα με δύο ελαφρώς αλληλεπιδρώντα σωματίδια με μάζα $m$ το καθένα που μπορούν να κινούνται ελεύθερα σε μία διάσταση. Βρίσκονται σε ένα μονοδιάστατο κουτί, μεταξύ $x = 0$ και $x = L$. Οι θέσεις τους είναι $x_1$ και $x_2$ και οι ορμές τους $p_1$ και $p_2$ αντιστοίχως. Η ολική ενέργεια του συστήματος βρίσκεται μεταξύ $E$ και $E+\delta E$. Να παρουσιάσετε τα μέρη του διαγράμματος φάσης $(x_1, x_2)$ και $(p_1, p_2)$ ξεχωριστά, και να επισημάνετε στο καθένα τις περιοχές που είναι προσιτές στα σωματίδια.

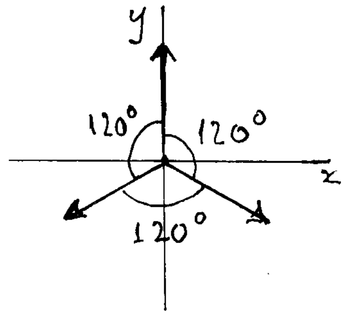
4) Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από $N$ σωματίδια με ασθενή μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Υποθέτουμε ότι το καθένα από τα σωματίδια αυτά μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις τρεις καταστάσεις με ενέργειες $-\varepsilon$, 0, $\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). (α) Να βρείτε την πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο στην κάθε μία από τις προσιτές του καταστάσεις. Ποια είνα η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος; (β) Να βρείτε τη μέση ενέργεια του Ε τουσυστήματος, καθώς και τα όριά της για $T \to 0$ K και για $T \to \infty$.

**5)** <u>Πώς πραγματοποιείται ο προσανατολισμός σπιν των ατόμων</u>

Θεωροῦμε ἕνα ὑλικό πού περιέχει ἄτομα μέ σπίν $\frac{1}{2}$ καί μέ μαγνητική ροπή $\mu_0$. Ἀφοῦ ἡ μαγνητική αὐτή ροπή ὀφείλεται σ'ἕνα ἀσύζευκτο ἠλεκτρόνιο, εἶναι τῆς τάξης μεγέθους τῆς μαγνητόνης τοῦ Bohr, δηλαδή $\mu_0 \approx 10^{-27}$ joule/gauss. Γιά νά κάνουμε πειράματα σκέδασης μέ ἄτομα πού τά σπίν τους εἶναι προσανατολισμένα σέ μιά συγκεκριμένη κατεύθυνση, ἕνας τρόπος εἶναι νά ἐφαρμόσουμε ἕνα ἰσχυρό μαγνητικό πεδίο B καί νά ψύξουμε τό ὑλικό σέ ἀρκετά χαμηλή θερμοκρασία, ὥστε νά πετύχουμε ἀξιόλογη πόλωση.

Στό ἐργαστήριο μποροῦμε νά παράγουμε ἀρκετά εὔκολα μαγνητικό πεδίο 50.000 gauss περίπου (5 tesla). Νά βρεῖτε τήν ἀπόλυτη θερμοκρασία T πού πρέπει νά φτάσουμε, ὥστε ὁ ἀριθμός τῶν ἀτομικῶν μαγνητικῶν ροπῶν πού κατευθύνονται παράλληλα πρός τό πεδίο νά εἶναι τουλάχιστο 3 φορές μεγαλύτερος ἀπό τόν ἀριθμό τῶν μαγνητικῶν ροπῶν πού κατευθύνονται ἀντίθετα. Ἡ ἀπάντηση νά ἐκφραστεῖ ὡς συνάρτηση τοῦ λόγου $T/T_R$, ὅπου $T_R$ ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος.

**6)** Θεωρούμε ένα παραμαγνητικό υλικό που περιέχει $N$ άτομα με μαγνητικές ροπές $\mu_o$. Αυτές οι μαγνητικές ροπές μπορούν να έχουν τρεις δυνατούς προσανατολισμούς, στο ίδιο επίπεδο, όπως δείχνει το σχήμα. Δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των ατόμων του υλικού αυτού.




(α) Να υπολογίσετε την ενέργεια ενός τέτοιου ατόμου για κάθε μία από τις παραπάνω καταστάσεις, όταν το υλικό βρίσκεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\,\mathbf{y}$.

Το παραμαγνητικό υλικό βρίσκεται σε ισορροπία σε θερμοκρασία $T$ και σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\,\mathbf{y}$. Για την περίπτωση αυτή:

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση επιμερισμού.

(γ) Να υπολογίσετε τη μέση μαγνήτιση και τη μέση ενέργεια ανά άτομο.

**7)** <u>Ἡ ἰδιότητα νά γίνεται ἐλάχιστη ἡ "ἐλεύθερη ἐνέργεια" γιά ἕνα σύστημα πού βρίσκεται σ'ἐπαφή μέ μιά δεξαμενή θερμότητας</u>

Ὅταν δύο συστήματα A καί A' τεθοῦν σέ θερμική ἐπαφή, ἡ ὁλική τους ἐντροπία τείνει ν'αὐξηθεῖ σύμφωνα μέ τή σχέση (20), δηλαδή

$$\Delta S + \Delta S' \geq 0. \qquad (1)$$

Ἄρα, ἡ κατάσταση ἰσορροπίας, πού τελικά ἐπιτυγχάνεται, ὅταν τό σύστημα A ἀπορροφήσει ἕνα ποσό θερμότητας $Q = \Delta\bar{E}$, ἀντιστοιχεῖ στήν κατάσταση, ὅπου ἡ ὁλική ἐντροπία $S + S'$ τοῦ σύνθετου ἀπομονωμένου συστήματος γίνεται μέγιστη.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι τό σύστημα A εἶναι μικρό σέ σύγκριση μέ τό A' ἔτσι, ὥστε τό A' νά συμπεριφέρεται σάν μιά δεξαμενή θερμότητας σέ κάποια σταθερή ἀπόλυτη θερμοκρασία T'. Ἡ μεταβολή τῆς ἐντροπίας $\Delta S'$ τοῦ A' μπορεῖ τότε νά ἐκφραστεῖ πολύ ἁπλά ὡς συνάρτηση τῶν $\Delta\bar{E}$ καί T'. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ σχέση (1), στήν περίπτωση αὐτή, συνεπάγεται ὅτι ἡ ποσότητα $F \equiv \bar{E} - T'S$ τείνει νά ἐλαττωθεῖ καί γίνεται ἐλάχιστη στήν κατάσταση ἰσορροπίας. (Ἡ συνάρτηση F ὀνομάζεται ἐλεύθερη ἐνέργεια Helmholtz τοῦ συστήματος A στή σταθερή θερμοκρασία T').

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 4, 5, 6

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (3) 1/12/2004

**8)** Θεωρούμε έναν αριθμό συστημάτων $A, B, C, D, \ldots$, τα οποία είναι σχεδόν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι η μεταξύ τους αλληλεπίδραση είναι τόσο ασθενής, ώστε μπορούν να θεωρηθούν ως ένα σύνθετο σύστημα $A+B+C+D+\ldots$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση επιμερισμού $Z_{A+B+C+D+\ldots}$ και η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz $F_{A+B+C+D+\ldots}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$Z_{A+B+C+D+\ldots} = Z_A Z_B Z_C Z_D \ldots, \qquad F_{A+B+C+D+\ldots} = F_A F_B F_C F_D \ldots$$

**9)** Ένα σύστημα αποτελείται από Ν σωματίδια που αλληλεπιδρούν ασθενώς μεταξύ τους και που το καθένα μπορεί να βρίσκεται είτε στη μία είτε στην άλλη από τις δύο καταστάσεις με αντίστοιχες ενέργειες $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$, όπου $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. (α) Χωρίς να κάνετε πράξεις, να σχεδιάσετε ποιοτικά τη μέση ενέργεια $\langle E \rangle$ του συστήματος ως συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας Τ. Πόση είναι η μέση ενέργεια $\langle E \rangle$ στο όριο των πολύ χαμηλών και των πολύ υψηλών θερμοκρασιών; Στη γειτονιά ποιας περίπου θερμοκρασίας περνάει η $\langle E \rangle$ από την οριακή τιμή χαμηλών θερμοκρασιών στην οριακή τιμή υψηλών θςερμοκρασιών; (β) Να βρείτε μία έκφραση για τη μέση ενέργεια $\langle E \rangle$ του συστήματος αυτού. Να βρείτε την $\langle E \rangle$ στο όριο των πολύ χαμηλών και των πολύ υψηλών θερμοκρασιών. (γ) Να υπολογίσετε τη θερμοχωρητικότητα C(T) του συστήματος συναρτήσει της απόλυτης θερμοκρασίας Τ. Να δείξετε ότι η C(T) παρουσιάζει μέγιστο και να εκτιμήσετε κατά προσέγγιση τη θερμοκρασία στην οποία συμβαίνει αυτό. Να βρείτε τη C(T) στο όριο των πολύ χαμηλών και των πολύ υψηλών θερμοκρασιών.

**10)** Σε ένα πολύ μεγάλο κομμάτι πάγου ανοίγεται μία τρύπα και μέσα σ' αυτήν βάζουμε 500 gram μολύβδου (Pb) σε θερμοκρασία 100 °C. (α) Πόσος πάγος θα λυώσει; (β) Να υπολογίσετε τη μεταβολή που θα επέλθει στην εντροπία του συστήματος κατά τη διαδικασία (α). Δίνονται: Ειδική θερμότητα του μολύβδου $C_{Pb}$ = 0,126 joules/(gram °C). Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 joules.

**11)** Μεταβολές της εντροπίας κατά τις ανταλλαγές θερμότητας (α) Ένα χιλιόγραμμο νερού σε θερμοκρασία 0 °C έρχεται σε επαφή με μία μεγάλη δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 100 °C. Όταν το νερό φτάσει τη θερμοκρασία των 100 °C, ποια θα είναι η μεταβολή στην εντροπία του νερού και η μεταβολή στην εντροπία της δεξαμενής θερμότητας; Ποια θα είναι η μεταβολή στην εντροπία του ολικού συστήματος (δεξαμενή θερμότητας και νερό);
(β) Εάν το νερό θερμαινόταν από τους 0 °C στους 100 °C φέρνοντάς το πρώτα σε επαφή με μία δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 50 °C και ύστερα με μία δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία 100 °C, ποια θα ήταν η μεταβολή της εντροπίας του ολικού συστήματος; (γ) Να δείξετε με ποιον τρόπο θα έπρεπε να θερμανθεί το νερό από τους 0 °C στους 100 °C, χωρίς να μεταβληθεί η εντροπία του ολικού συστήματος.

**12)** Η εντροπία κατά την τήξη Πάγος και νερό συνυπάρχουν σε ισοππoπία στη θερμοκρασία 0 °C. Για να λυώσει ένα γραμμομόριο (mol) πάγου απαιτείται ποσό θερμότητας 6000 joules. (α) Να υπολογίσετε τη διαφορά εντροπίας μεταξύ ενός γραμμομορίου νερού και ενός γραμμομορίου πάγου σε θερμοκρασία 0 °C. (β) Να βρείτε το λόγο του αριθμού των προσιτών καταστάσεων του νερού προς τον αριθμό των προσιτών καταστάσεων του πάγου στην ίδια θερμοκρασία.

**13)** Ένα δοχείο περιέχει 1000 gram νερού. Το σύστημα αυτό είναι απομονωμένο και βρίσκεται σε θερμοκρασία 20° C. Τοποθετούμε μέσα στο δοχείο ένα κομμάτι πάγου 400 gram με θερμοκρασία -10°C και ξανααπομονώνουμε το σύστημα. Η ειδική θερμότητα του πάγου είναι 2,13 Joules/(gram K) και η ειδική θερμότητα του νερού είναι 4,18 Joules/(gram K). Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 Joules. (α) Θα λυώσει όλος ο πάγος; Εάν ναι, ποια θα είναι η τελική θερμοκρασία του συστήματος; Εάν όχι, πόσος πάγος θα παραμείνει στο δοχείο; (β) Να υπολογίσετε την ολική μεταβολή στην εντροπία που θα επέλθει στο σύστημα.

**14)** Ένα σύστημα έχει τρεις ενεργειακές στάθμες που αντιστοιχούν στους κβαντικούς αριθμούς $n$=1,2,3 με ενέργειες $E_n = n\varepsilon$ και αντίστοιχους εκφυλισμούς $g_n = 2n-1$. Το σύστημα αυτό βρίσκεται σε θερμική επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία $T$ και αποτελείται από $N$ σωματίδια τα οποία δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.
(α) Υπολογίστε, ως συνάρτηση του $\varepsilon$ και του $T$ τους λόγους $N_2/N_1$ και $N_3/N_1$ του πλήθους των σωματιδίων που βρίσκονται στις διεγερμένες στάθμες $E_2$ και $E_3$ αντιστοίχως, προς το πλήθος των των σωματιδίων στη θεμελιώδη $E_1$.
(β) Να γράψετε τη συνάρτηση επιμερισμού $Z$ του συστήματος ως συνάρτηση των $T$ και $\varepsilon$.
(γ) Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τη μέση ενέργεια και τη θερμοχωρητικότητα του συστήματος.
(δ) Πόση είναι η μέση ενέργεια του συστήματος στις οριακές περιπτώσεις $T\to 0$ και $T\to\infty$; Να δικαιολογήσετε το αποτέλεσμα με φυσικά επιχειρήματα.
(ε) Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα των $N$ σωματιδίων στις οριακές περιπτώσεις $T\to 0$ και $T\to\infty$. (Εφαρμόστε το στην περίπτωση $N = 45$.)
Υπόδειξη: Θεωρήστε στην αρχή ένα μόνον σωματίδιο και σκεφτείτε πόσες είναι οι οι προσιτές καταστάσεις του στις δύο οριακές περιπτώσεις.

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **12, 13,14**

# ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ (2, 3)

**4)** Η συνάρτηση επιμερισμού για το ένα σωματίδιο, όταν έχουμε τρεις προσιτές καταστάσεις, είναι $\zeta = \exp(-\beta\varepsilon_1) + \exp(-\beta\varepsilon_2) + \exp(-\beta\varepsilon_3)$. Για το πρόβλημα, έχουμε $\varepsilon_1 = -\varepsilon$, $\varepsilon_2 = 0$ , $\varepsilon_3 = \varepsilon$, $(\varepsilon>0)$ και τότε $\zeta = \exp(\beta\varepsilon) + 1 + \exp(-\beta\varepsilon) = 1+2\cosh(\beta\varepsilon)$. Η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο σε κάθε μία από τις προσιτές του καταστάσεις είναι:

$P_1 = [\exp(-\beta\varepsilon_1)]/\zeta = [\exp(\beta\varepsilon)]/\zeta$, $\quad P_2 = [\exp(-\beta\varepsilon_2)]/\zeta = 1/\zeta$, $\quad P_3 = [\exp(-\beta\varepsilon_3)]/\zeta = [\exp(-\beta\varepsilon)]/\zeta$.

$(P_1+P_2+P_3 = 1)$.

Επειδή τα σωματίδια έχουν αμελητέα αλληλεπίδραση, η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος των N σωματιδίων, $Z$ είναι $Z = \zeta^N = [\exp(\beta\varepsilon) + 1 + \exp(-\beta\varepsilon)]^N = [1+2\cosh(\beta\varepsilon)]^N$

Μέση ενέργεια του συστήματος:

Για το ένα σωματίδιο,

$\langle\varepsilon\rangle = \{\varepsilon_1 \exp(-\beta\varepsilon_1) + \varepsilon_2 \exp(-\beta\varepsilon_2) + \varepsilon_3 \exp(-\beta\varepsilon_3)\}/\zeta = \{-\varepsilon\, e^{\beta\varepsilon} + 0 + \varepsilon\, e^{-\beta\varepsilon}\}/\{1+2\cosh(\beta\varepsilon)\} =$
$-\varepsilon\{\sinh(\beta\varepsilon)\}/\{1+2\cosh(\beta\varepsilon)\}$.

Για τα N σωματίδια, $\langle E\rangle = N\langle\varepsilon\rangle = -N\varepsilon\{\sinh(\beta\varepsilon)\}/\{1+2\cosh(\beta\varepsilon)\}$.

Άλλος τρόπος: $\langle E\rangle = -\partial \ln Z/\partial\beta = -(1/Z)\,\partial Z/\partial\beta = -[1/\zeta^N]N\zeta^{N-1}(\varepsilon\, e^{\beta\varepsilon} + 0 - \varepsilon\, e^{-\beta\varepsilon}) = -N\varepsilon\,\{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}\}/\zeta =$
$-N\varepsilon\{\sinh(\beta\varepsilon)\}/\{1+2\cosh(\beta\varepsilon)\}$.

Καθώς $T\to 0$, $(\beta\to\infty)$, $\langle E\rangle \to -N\varepsilon$

Και για $T\to\infty$, $(\beta\to 0)$, $\langle E\rangle \to -N\varepsilon\,(1-1)/(1+1+1) \to 0$.

**5)** $E = -\boldsymbol{\mu}_o \bullet \mathbf{B}$: Εάν η μαγνητική ροπή $\boldsymbol{\mu}_o$ είναι παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο **B**, $E_1 = -\mu_o B$ και εάν είναι αντιπαράλληλη στο **B**, $E_2 = +\mu_o B$. Η συνάρτηση επιμερισμού για ένα άτομο είναι $\zeta = \exp(-\beta E_1) + \exp(-\beta E_2) = \exp(\beta\mu_o B) + \exp(-\beta\mu_o B)$. Η πιθανότητα, $P_+$ για ένα άτομο να έχει μαγνητική ροπή παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο είναι $P_+ = \{\exp(-\beta E_1)\}/\zeta = \{\exp(\beta\mu_o B)\}/\zeta$ και η πιθανότητα, $P_-$ για ένα άτομο να έχει μαγνητική ροπή αντιπαράλληλη στο μαγνητικό πεδίο είναι $P_- = \{\exp(-\beta E_2)\}/\zeta = \{\exp(-\beta\mu_o B)\}/\zeta$. Άρα, $(P_+/P_-) = \{\exp(\beta\mu_o B)/\exp(-\beta\mu_o B)\} = \exp(2\beta\mu_o B)$.

Για να έχουμε $(P_+/P_-) = 3$, πρέπει να ισχύει η σχέση $\exp(2\beta\mu_o B) = 3$.

Άρα, $2\beta\mu_o B = \ln 3$ και συνεπώς $\beta = (\ln 3)/(2\mu_o B)$.

$\mu_o = 10^{-27}$ joule/gauss, B= 50 000 gauss. Άρα, $\beta = (\ln 3)/(2\times10^{-27}\times5\times10^{4}) = (\ln 3)/(2\times10^{-22})\ J^{-1}$.

Όμως, $\beta = 1/(k_B T)$, $\to T = 1/(k_B\beta) = [10^{-22}/(\ln 3)]\ J \times [1/(1{,}38054\times10^{-23}\ J\times K^{-1})] = 6{,}596$ K.

Άρα, στη θερμοκρασία T = 6,596 K, ο αριθμός των μαγνητικών ροπών που κατευθύνονται παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο είνα 3 φορές μεγαλύτερος από τον αριθμό των μαγνητικών ροπών που κατευθύνονται αντιπαράλληλα σ'αυτό. Για $T_R \approx 300$ K, $T/T_R = 2{,}2\times10^{-2}$.

**6)** (α) $\varepsilon = -\boldsymbol{\mu}_o \bullet \mathbf{B} = -\mu_o B\cos\theta$, $\quad (\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3)$ και άρα

$\varepsilon(\theta=0) = -\mu_o B$,

$\varepsilon(\theta=2\pi/3) = -\mu_o B\cos(2\pi/3) = -\mu_o B\times(-1/2) = \mu_o B/2$,

$\varepsilon(\theta=4\pi/3) = -\mu_o B\cos(4\pi/3) = -\mu_o B\times(-1/2) = \mu_o B/2$.

(β) Για ένα άτομο, η συνάρτηση επιμερισμού $\zeta$ είναι:

$\zeta = e^{-\beta\varepsilon(0)} + e^{-\beta\varepsilon(2\pi/3)} + e^{-\beta\varepsilon(4\pi/3)} = \exp(\beta\mu_o B) + \exp(-\beta\mu_o B/2) + \exp(-\beta\mu_o B/2) = \exp(\beta\mu_o B) + 2\exp(-\beta\mu_o B/2)$.

Για N άτομα, με αμελητέα αλληλεπίδραση, η συνάρτηση επιμερισμού Z είναι:

$Z = \zeta^N = (\exp(\beta\mu_o B) + 2\exp(-\beta\mu_o B/2))^N$.

(γ) Μέση μαγνήτιση ανά άτομο:

$\langle m\rangle = (1/N)\times\{(1/\beta)\,\partial\ln Z/\partial B\} = (1/N\beta)\times\partial\ln\{[\exp(\beta\mu_o B) + 2\exp(-\beta\mu_o B/2)]^N\}/\partial B =$

$= (1/N\beta)\times N\times\partial\ln[\exp(\beta\mu_o B) + 2\exp(-\beta\mu_o B/2)]/\partial B =$

$= (1/\beta)\times(\beta\mu_o)\times[\exp(\beta\mu_o B) + 2\times(-1/2)\times\exp(-\beta\mu_o B/2)]/[\exp(\beta\mu_o B) + 2\exp(-\beta\mu_o B/2)]$

Άρα,

$$\boxed{\langle m\rangle = \{[1-\exp(-3\beta\mu_o B/2)]/[1+2\exp(-3\beta\mu_o B/2)]\}\,\mu_o}$$

Μέση ενέργεια ανά άτομο:

$\langle\varepsilon\rangle = -\partial\ln\zeta/\partial\beta = -\partial\ln[\exp(\beta\mu_o B) + 2\exp(-\beta\mu_o B/2)]/\partial\beta =$

$= -\mu_o B\,[\exp(\beta\mu_o B) + 2\times(-1/2)\times\exp(-\beta\mu_o B/2)]/[\exp(\beta\mu_o B) + 2\exp(-\beta\mu_o B/2)]$

Άρα,

$$\boxed{\langle\varepsilon\rangle = -\{[1-\exp(-3\beta\mu_o B/2)]/[1+2\exp(-3\beta\mu_o B/2)]\}\,\mu_o B}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\boxed{\langle\varepsilon\rangle = -\langle m\rangle B}$$

**12)** Στους T= 0 °C (= 273,15 K):
(α) $\Delta S = S_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}} - S_{\pi\text{άγου}} = \Delta Q/T = 6000/273,15 = 21,97$ Joules/Kelvin.
(β) $S = k_B \ln \Omega$. Άρα,
$\Delta S = k_B \ln \Omega_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}} - k_B \ln \Omega_{\pi\text{άγου}} = k_B \ln (\Omega_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}} / \Omega_{\pi\text{άγου}}) = 21,97$ Joules/Kelvin.
Τότε, $(\Omega_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}} / \Omega_{\pi\text{άγου}}) = \exp(\Delta S/ k_B) = \exp(21,97/1,38\times10^{-23}) = \exp(15,9\times10^{24}) \approx 10^{\alpha}$,
Οπου $\alpha \approx 6,8\times10^{24}$.
Παρατηρούμε ότι

$$\boxed{\Omega_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}} >> \Omega_{\pi\text{άγου}}}$$

**13)** (α) Για να αυξηθεί η θερμοκρασία του πάγου από τους –10 °C, στους 0 °C θα απορροφήσει θερμότητα: $Q_{\pi\text{άγου}\,(-10\ \to 0\ )} = m_{\pi\text{άγου}}\, c_{\pi\text{άγου}}\, \Delta T_{\pi\text{άγου}}$ = (400 gram) (2,13 joule/gram K) (10 K) = 8520 J.

Για να λυώσει ο πάγος, που βρίσκεται στους 0 °C, απαιτείται ποσό θερμότητας
$Q_{\tau\text{ήξης}\,\pi\text{άγου}}$ = (400 gram) (333 joules/gram) = 132 200 joules.

Για να μειωθεί η θερμοκρασία του νερού από τους 20 °C στους 0 °C θα εκλυθεί ποσό θερμότητας:
$Q_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}\,(20\ \to 0\ )} = m_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}}\, c_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}}\, \Delta T_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}}$ = (1000 gram) (4,18 joule/gram K) (-20 K) = - 83600 J.

Έναι προφανές ότι αυτό το ποσό θερμότητας που μπορεί να εκλυθεί από το νερό όταν μειωθεί η θερμοκρασία του από τους 20 °C στους 0 °C, δεν είναι επαρκές για να αυξήσει τη θερμοκρασία του πάγου από τους –10 °C στους 0 °C **και** να τον λυώσει όλον. Το ποσό θερμότητας που θα είναι διαθέσιμο για να λυώσει πάγο θα είναι: $Q = |Q_{\nu\varepsilon\rho\text{ού}\,(20\ \to 0\ )}| - Q_{\pi\text{άγου}\,(-10\ \to 0\ )}$ = (83600 –8520)J = 75080 J. Εφόσον παιτούνται 333 J για να λύώσει ένα γραμμάριο πάγου, θα λυώσουν m = Q/333 = 75080 J/(333 J/gram) = 225,47 gram.
Άρα, **θα λυώσουν 225,47 gram και θα παραμείνουν 174,53 gram πάγου**. Η τελική θερμοκρασία θα είναι 0 °C.

(β) $\Delta S = \Delta S_{\pi\text{άγου}\,(-10\ \to 0\ )} + \Delta S_{\tau\text{ήξης}\,\pi\text{άγου}} + \Delta S_{\nu\varepsilon\rho\text{ού στο δοχείο}\,(20\ \to 0\ )}$

$$\Delta S_{\pi\text{άγου}\,(-10\ \to 0\ )} = \int_{263}^{273} [(400)\,(2,13)\,/T]\, dT = 852 \ln (273/263) = 31,79 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\tau\text{ήξης}\,\pi\text{άγου}} = [75080]/[273] = 275,02 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\nu\varepsilon\rho\text{ού στο δοχείο}\,(20\ \to 0\ )} = \int_{293}^{273} [(100)\,(4,18)\,/T]dT = 4180 \ln (273/293) = -295,53 \text{ J/K}$$

Άρα,
$\Delta S = \Delta S_{\pi\text{άγου}\,(-10\ \to 0\ )} + \Delta S_{\tau\text{ήξης}\,\pi\text{άγου}} + \Delta S_{\nu\varepsilon\rho\text{ού στο δοχείο}\,(20\ \to 0\ )} =$
$= (31,79 + 275,02 - 295,53)$J/K = 11,28 J/K.

**14)** $E_n = n\varepsilon$ $\quad E_1 = \varepsilon,\quad E_2 = 2\varepsilon,\quad E_3 = 3\varepsilon\ (\varepsilon>0)$
$g_n = 2n-1 \quad g_1 = 1,\quad g_2 = 3,\quad g_3 = 5$
Η συνάρτηση επιμερισμού για το ένα σωματίδιο είναι:
$\zeta = g_1\times\exp(-\beta E_1) + g_2\times\exp(-\beta E_2) + g_3\times\exp(-\beta E_3) = e^{-\beta\varepsilon} + 3\, e^{-2\beta\varepsilon} + 5\, e^{-3\beta\varepsilon} = e^{-\beta\varepsilon}\{1 + 3\, e^{-\beta\varepsilon} + 5\, e^{-2\beta\varepsilon}\}$
(α) Η πιθανότητα να είναι ένα σωματίδιο σε κάθε μία από τις καταστάσεις 1, 2, 3 είναι αντιστοίχως $P_1 = [1/\zeta]\, e^{-\beta\varepsilon}$, $\quad P_2 = [1/\zeta]\, 3e^{-2\beta\varepsilon}$, $\quad P_3 = [1/\zeta]\, 5e^{-3\beta\varepsilon}$. Άρα, από τα $N$ μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια, τα $N_1 = NP_1$ είναι στην κατάσταση #1, τα $N_2 = NP_2$ είναι στην κατάσταση #2 και τα $N_3 = NP_3$ είναι στην κατάσταση #3.
$N_2/N_1 = P_2/P_1 = 3\, e^{-2\beta\varepsilon}/ e^{-\beta\varepsilon} = 3\, e^{-\beta\varepsilon}$ $\qquad N_3/N_1 = P_3/P_1 = 5\, e^{-3\beta\varepsilon}/ e^{-\beta\varepsilon} = 5\, e^{-2\beta\varepsilon}$
(β) Η συνάρτηση επιμερισμού, $Z$, του συστήματος των $N$ μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων είναι:
$Z = [\zeta]^N = [e^{-\beta\varepsilon}\{1 + 3\, e^{-\beta\varepsilon} + 5\, e^{-2\beta\varepsilon}\}]^N$.
(γ) Μέση ενέργεια του ενός σωματιδίου:
$\langle\varepsilon\rangle = [1/\zeta]\ \sum \varepsilon_n\, g_n \exp(-\beta E_n) = [1/\zeta]\ [\varepsilon\, e^{-\beta\varepsilon} + 2\varepsilon\times3\, e^{-2\beta\varepsilon} + 3\varepsilon\times5\, e^{-3\beta\varepsilon}] =$
$= \{[1 + 6\, e^{-\beta\varepsilon} + 15\, e^{-2\beta\varepsilon}]/[\,1 + 3\, e^{-\beta\varepsilon} + 5\, e^{-2\beta\varepsilon}]\}\varepsilon$
άρα, η μέση ενέργεια του συστήματος των $N$ μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων είναι:
$\langle E\rangle = N\langle\varepsilon\rangle = \{[1 + 6\, e^{-\beta\varepsilon} + 15\, e^{-2\beta\varepsilon}]/[\,1 + 3\, e^{-\beta\varepsilon} + 5\, e^{-2\beta\varepsilon}]\}N\varepsilon$.
Η ειδική θερμότητα C είναι:
$C = \partial\langle E\rangle/\partial T = (\partial\langle E\rangle/\partial\beta)\,(\partial\beta/\partial T) = -N\{[3 + 20\, e^{-\beta\varepsilon} + 15\, e^{-2\beta\varepsilon}]/\,[1 + 3\, e^{-\beta\varepsilon} + 5\, e^{-2\beta\varepsilon}]^2\}\, e^{-\beta\varepsilon}\times\varepsilon\times[-1/k_BT^2]$

(όπου $\partial\beta/\partial T = -1/k_B T^2 = -k_B\beta^2$)
Άρα, (*με πάσα επιφύλαξη για τις πράξεις ...*)

$$\boxed{C = N k_B \beta^2 e^{-\beta\varepsilon}\{[3+20 e^{-\beta\varepsilon} + 15 e^{-2\beta\varepsilon}]/[1+3e^{-\beta\varepsilon}+5e^{-2\beta\varepsilon}]^2\}\varepsilon}$$

(δ) Για $T \to 0$, $\beta\varepsilon \to \infty$ και $e^{-\beta\varepsilon} \to 0$. $\langle E\rangle(T\to 0) \to \{[1+0+0]/[1+0+0]\}N\varepsilon = N\varepsilon$. Όλα τα σωματίδια βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση (#1). $P_1(T\to 0)=1$, $P_2(T\to 0)=0$, $P_3(T\to 0)=0$.
Για $T \to \infty$, $\beta\varepsilon \to 0$ και $e^{-\beta\varepsilon} \approx 1-\beta\varepsilon + \ldots$
Στην περίπτωση αυτή,
$\zeta(T\to\infty) \approx (1-\beta\varepsilon)\,[1+3-3\beta\varepsilon+5-10\,\beta\varepsilon+\ldots] \approx (1-\beta\varepsilon)\,[9-13\beta\varepsilon+\ldots] \approx 9-22\beta\varepsilon+\ldots$
και άρα,
$\langle E\rangle(T\to\infty) \approx \{(1-\beta\varepsilon)\,[1+6-6\beta\varepsilon+15-30\,\beta\varepsilon+\ldots]/[9-22\,\beta\varepsilon]\}N\varepsilon$
$\approx \{[22-58\,\beta\varepsilon]/[9-22\,\beta\varepsilon]\}N\varepsilon \approx [22/9]\,N\varepsilon.$
Παρατηρούμε ότι για $T \to \infty$, $P_n(T\to\infty) \to g_n/(g_1+g_2+g_3)$ ($P_1 \to 1/9 = g_1/9$, $P_2 \to 3/9 = g_2/9$, $P_3 \to 5/9 = g_3/9$), οι καταστάσεις είναι δηλαδή ισομοιρασμένες, σύμφωνα με το βαθμό εκφυλισμού της κάθε ενεργειακής στάθμης. Συνεπώς,
$\langle E\rangle(T\to\infty) = \varepsilon_1 P_1(T\to\infty) + \varepsilon_2 P_2(T\to\infty) + \varepsilon_3 P_3(T\to\infty) =$
$= \varepsilon\times(1/9) + 2\varepsilon\times(3/9) + 3\varepsilon\times(5/9) = [22/9]\varepsilon.$
(δ) Εάν $N = 45$:
Για $T\to 0$,
$N_1(T\to 0) = NP_1(T\to 0) = 45\times 1 = 45$, $N_2(T\to 0) = NP_2(T\to 0) = 45\times 0 = 0$,
$N_3(T\to 0) = NP_3(T\to 0) = 45\times 0 = 0$.
ΟΛΑ ΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ.
Για $T\to\infty$,
$N_1(T\to\infty) = NP_1(T\to\infty) = 45\times[1/9] = 5$, $N_2(T\to\infty) = NP_2(T\to\infty) = 45\times[3/9] = 15$,
$N_3(T\to\infty) = NP_3(T\to\infty) = 45\times[5/9] = 25$.
ΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΜΟΙΡΑΣΜΕΝΑ, ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟ ΒΑΘΜΟ ΕΚΦΥΛΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΚΑΘΕ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΣΤΑΘΜΗΣ.