

# ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική II

Τελική εξέταση Μαρτίου, 18/03/2008.

Διδάσκων Κ. Φαράκος

**Θέμα I.** α) Αποδείξτε την σχέση που δίνει την χρονική μεταβολή της μέσης τιμής

$$\text{ενός τελεστή } A: \quad \frac{d \langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

β) Εάν  $H$  είναι η Χαμιλτονιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας  $m$  και συχνότητας  $\omega$ , υπολογίστε τις ποσότητες  $\frac{d \langle x \rangle}{dt}$ ,  $\frac{d \langle p \rangle}{dt}$  και δείξτε ότι

$$\frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} = -\omega^2 \langle x \rangle$$

**Θέμα II.** Κβαντομηχανικό σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$H = H_0 + V$ . Υποθέτουμε ότι λύνουμε για την Χαμιλτονιανή  $H_0$  και ξερούμε τις ιδιοσυναρτήσεις της  $\Psi^{(0)}_n$  και τις ιδιοενέργειες  $E^{(0)}_n$ ,  $H_0 \Psi^{(0)}_n = E^{(0)}_n \Psi^{(0)}_n$ .

Εάν θεωρήσουμε τον όρο  $V$  σαν διαταραχή βρείτε την διόρθωση στην ενέργεια και στην κυματοσυνάρτηση σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών. Προσοχή, κάντε όλους τους απαιτούμενους ενδιάμεσους υπολογισμούς. Υποθέστε ότι δεν έχουμε εκφυλισμό.

**Θέμα III.** Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης για

έναν τρισδιάστατο ταλαντωτή μάζας  $m$  με δυναμικό:  $V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \lambda r^4$ .

**Θέμα IV.** Σωματίο μάζας  $m$  κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού  $V(r)$

$$\text{όπου, } V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ V_0 & a < r \end{cases}$$

Προσδιορίστε το  $V_0$  έτσι ώστε το σύστημα να έχει για στροφορμή μηδέν μόνο δύο δέσμιες καταστάσεις.

**Θέμα V.** Το ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου είναι στην κατάσταση

$$R_{21} \left( \sqrt{1/3} Y_{10} \chi_+ + \sqrt{2/3} Y_{11} \chi_- \right)$$

όπου  $\chi_{\pm}$  είναι οι καταστάσεις σπίν.

(α) Εάν μετρήσετε τα  $L^2$ ,  $L_z$ ,  $S^2$  και  $S_z$  ποιές είναι οι πιθανές τιμές και με τι πιθανότητα έκαστη?

(β) Έστω  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  η ολική στροφορμή. Αποδείξτε την σχέση:

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + L_+ S_- + L_- S_+$$

(γ) Υπολογίστε τα  $\langle J_z \rangle$  και  $\langle \mathbf{J}^2 \rangle$ .

**Θέμα VI.** Η κυματοσυνάρτηση του spin ενός ηλεκτρονίου είναι  $\Psi = C \chi_- + 3C \chi_+$

όπου οι συναρτήσεις  $\chi_+$  και  $\chi_-$  είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της  $z$  συνιστώσας του spin και  $C$  μία σταθερά κανονικοποίησης. Έστω ότι μετράμε το spin του σωματιδίου στην κατεύθυνση ενός άξονα  $\mathbf{n}$  που αντιστοιχεί ο τελεστής

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}s_x + s_y), \text{ όπου } s_x \text{ και } s_y \text{ οι τελεστές του spin στις διευθύνσεις } x, y$$

αντίστοιχα. (α) Τι τιμές θα βρούμε για το spin του σωματιδίου σε αυτήν την κατεύθυνση; (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να βρούμε κάθε μία από τις τιμές αυτές; (γ) Δώστε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.

$$\text{Δίνονται: } s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Psi) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$c_+(j, m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}, \quad c_-(j, m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}, \quad J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

Οι δύο πρώτες κυματοσυναρτήσεις του μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή:

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha x^2/2), \quad \Psi_1(x) = \sqrt{\alpha/\pi} \sqrt{2\alpha} x \exp(-\alpha x^2/2), \quad \alpha = m\omega/\hbar.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{(2n)!}{n!(4\alpha)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες. Με κλειστά βιβλία. Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Γράψτε τα τέσσερα από τα έξι θέματα.