1. Αν ο πίνακας \( A \) είναι κανονικός τετοιος ώστε \( A^9 = A^8 \), δείξτε ότι \( A \) είναι ερμιτιανός και \( A^2 = A \).

2. Αν \( \sigma \) και \( \tau \) είναι αντίστοιχα η μικρότερη και μεγαλύτερη ιδιαίτερα τιμή του μην πίνακα \( A \), δείξτε ότι

\[
\sigma \| x \|_2 \leq \| Ax \|_2 \leq \tau \| x \|_2
\]

για κάθε διανύσμα \( x \in \mathbb{C}^n \).

3. Αν \( \sigma_1, \sigma_2 \) είναι οι μεγαλύτερες ιδιαίτερες τιμές αντίστοιχα των μην πίνακων \( A, B \) και \( \sigma \) είναι η μεγαλύτερη ιδιαίτερα τιμή του \( A + B \), δείξτε ότι \( \sigma \leq \sigma_1 + \sigma_2 \).

4. Δείξτε για τους πίνακες \( A, B \) την σχέση:

\[
\text{rank}(AB) \leq \min \{ \text{rank}A, \text{rank}B \}.
\]

5. Δείξτε ότι ενας χώρος \( K \) είναι \( A \)-αναλλοιωτός ακριβώς όταν \( K^\perp \) είναι \( A^* \)-αναλλοιωτός.

Διαρκεία Εξετασης: 2.30 Ω