Τομέας ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Σχολή ΕΦΑΡΜ ΜΑΘΗΜ & ΦΥΣ ΕΠ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ
157 80, ΑΘΗΝΑ.

Department of MATHEMATICS
School of APPLIED MATH & PHYS SC
ZOGRAFOS CAMPUS, GR - 157 80
ATHENS, GREECE

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002, ΩΡΑ 18.00

1) Αν $f(t,x)$ είναι μια συνάρτηση συνεχής και ορισμένη στο $D \subseteq R^2$ και $\phi(t)$ είναι λύση της εξίσωσης $x' = f(t,x)$ σ' ένα διάστημα $J \subseteq R$, τότε η $\phi(t)$ μπορεί να επεκταθεί σ' ένα μέγιστο ανοιχτό διάστημα ύπαρξης $J^* \supset J$.

(2) (α) Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$(i)\ y' = (x-y)^{1/2},\ y(2) = 2, \quad (ii)\ y' = \ln(1+y^2),\ y(0) = 0.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν αυτή υπάρχει.

(β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα ύπαρξης (a,b), για το πρόβλημα αρχικών συνθηκών:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (2x_1)^{-1} \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση που, $a > -\infty$ ή $b < +\infty$, να προσδιορισθούν τα πλευρικά όρια της λύσης, καθώς το $t \to a+$ ή $t \to b-$, αντίστοιχα.

(3) Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t)$, $t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη σε μία γειτονιά του $x(t) \equiv 0$, $t \geq 0$. Τότε:

(i) αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, η λύση $x(t) \equiv 0$, για κάθε $t \geq 0$, είναι ευσταθής, και

(ii) αν η $\dot{V}(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη, η λύση $x(t) \equiv 0$, για κάθε $t \geq 0$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθής

(4) (α) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας του κρίσιμου σημείου για το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y, \\ y' &= -2x - y. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσεων του συστήματος.

(β) Να προσδιορισθεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου μη γραμμικού συστήματος:

$$x' = -y + x + xy, \quad y' = x - 2y,$$

με χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης.

(5) Να βρεθεί η γενική λύση του ακόλουθου γραμμικού ομογενούς συστήματος:

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x.$$

(6) Να βρεθεί η γενική λύση του ακόλουθου γραμμικού μη ομογενούς συστήματος:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t.$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ **ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9**