ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

6ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2006, ΩΡΑ 12.00

(1) (**Θεώρημα Ευστάθειας**) Έστω ότι η $x^*(t) = 0$, για κάθε $t \geq t_0$, για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$, είναι η μηδενική λύση του συστήματος $x' = X(x)$, $X(0) = 0$ (δηλαδή η αρχή 0 είναι στάσιμο σημείο). Επίσης, υποθέτουμε ότι, υπάρχει μια συνάρτηση $V(x)$ θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη σε μια γειτονιά S του $x = 0$. Τότε (i) αν η $V'(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, η λύση $x^*(t) = 0$, για κάθε $t \geq t_0$, είναι ευσταθής, και (ii) αν η $V'(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη, η λύση $x^*(t) = 0$, για κάθε $t \geq t_0$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθής. (**Βαθμοί: 1.0**)

(2) Να διερευνηθεί η ύπαρξη λύσεων σε κάποιο διάστημα γύρω από την αρχική τιμή για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών:

$$(i)\ y' = y^{1/4},\ y(8) = 8, \quad (ii)\ y' = y^{1/4},\ y(10) = 5, \quad (iii)\ y' = x^2 \ln y,\ y(1) = 1.$$

Στη συνέχεια να εξετασθεί το μονοσήμαντο της λύσης, όταν αυτή υπάρχει. (**Βαθμοί: 1.5**)

(3) Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(**Βαθμοί: 1.5**)

(4) (α) Έστω ότι ο πίνακας $A(t)$ του συστήματος $x'(t) = A(t)\,x(t)$, είναι περιοδικός με ελάχιστη περίοδο T. Έστω επίσης ότι οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του συστήματος είναι $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$. Τότε

$$\mu_1\,\mu_2 \ldots \mu_n = exp\left(\int_0^T tr(A(s))\,ds\right),$$

όπου με $tr(A(s))$ συμβολίζεται το ίχνος του πίνακα $A(t)$. (**Βαθμοί: 1.0**)

(β) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικοί αριθμοί των ακόλουθων συστημάτων:

$$(i)\ \ x'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \cos^2 2t \end{pmatrix} x(t), \qquad (ii)\ \ x'(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & 0 \\ \sin 2t & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

(**Βαθμοί: 1.5**)

(5) (α) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί ο τύπος και το είδος ευστάθειας αυτών και να σχεδιασθεί το αντίστοιχο επίπεδο φάσεων

$$x' = x + 2y, \quad y' = -5x - y.$$

(**Βαθμοί: 1.0**)

(β) Να γίνει ταξινόμηση των κρίσιμων σημείων του ακόλουθου συστήματος, με τη χρήση της θεωρίας γραμμικοποίησης:

$$x' = -y + x + xy, \qquad y' = x - 2y.$$

(**Βαθμοί: 1.0**)

(6) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης της ακόλουθης διαφορικής εξίσωσης $x' = \lambda^2 + 8a\lambda x + x^2$, όπου a είναι μια σταθερά. Να γίνει περιγραφή των τροχιακών δομών αυτής για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης. (**Βαθμοί: 1.5**)

ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 10

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!