



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
 ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
 Τ Ο Μ Ε Α Σ Φ Υ Σ Ι Κ Η Σ

Τελικές εξετάσεις στο μάθημα **Φ Υ Σ Ι Κ Η Ι** 22 Φεβρουαρίου 2000

Διδάσκοντες: Ρ. Βλαστού, Σ. Παπαδόπουλος, Κ. Χριστοδουλίδης

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες Απαντήστε σε όλα τα θέματα Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Θέμα 1 Σώμα μάζας m κινείται κατά μήκος του άξονα των x . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}(0) = v_0 \hat{x}$ ($v_0 > 0$). Όταν κινείται στην περιοχή $0 < x < \ell$, το σώμα υφίσταται δύναμη τριβής της οποίας το μέτρο είναι ίσο με kv^2 και η κατεύθυνση αντίθετη αυτής της ταχύτητας του σώματος. Να βρεθούν:

- (α) Η ταχύτητα \vec{v} του σώματος, όταν αυτό βρίσκεται στην περιοχή $0 < x < \ell$, ως συνάρτηση (i) του χρόνου t , και (ii) της απόστασης x .
- (β) Η θέση $x(t)$ του σώματος, όταν αυτό βρίσκεται στην περιοχή $0 < x < \ell$, ως συνάρτηση του χρόνου t .
- (γ) Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να περάσει μέσα από την περιοχή $0 < x < \ell$, και η ταχύτητά του κατά την έξοδό του από την περιοχή.

Θέμα 2 Ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια που δίνεται (σε μονάδες S.I.) από τις σχέσεις:

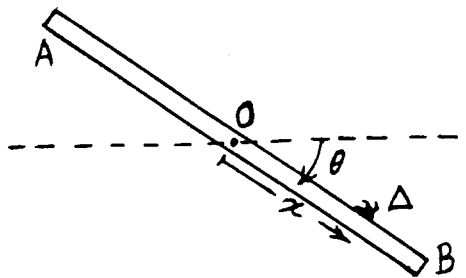
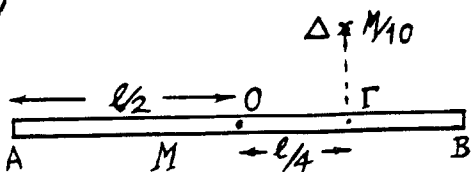
$$U(r) = -1 \text{ για } r \leq 1, \quad \text{και} \quad U(r) = \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} \text{ για } r \geq 1,$$

όπου r είναι η απόσταση του σώματος από ένα σταθερό κέντρο.

- (α) Να βρεθεί η δύναμη \vec{F} που ασκεί το πεδίο πάνω στο σώμα. Πού είναι ελκτική και πού είναι απωστική η δύναμη;
- (β) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$ (αναδεικνύοντας μόνο τα κύρια χαρακτηριστικά της).
- (γ) Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευθεί το σώμα, από απόσταση $r = \infty$, προς το κέντρο, για να μπορέσει να φθάσει στο σημείο $r = 0$; Το σώμα έχει μάζα $m = 1 \text{ kg}$.
- (δ) Αν σε κάποια στιγμή το σώμα βρίσκεται στο σημείο $r = 0$ και έχει ολική ενέργεια $E_{ολ} = 0$, σε ποια περιοχή του χώρου μπορεί να κινηθεί;

Θέμα 3 Λεπτή ομοιογενής ράβδος AB έχει μήκος ℓ και μάζα M . Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο, και περνά από το κέντρο της, O. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί στην οριζόντια θέση (βλ. σχήμα).

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ένα έντομο Δ του οποίου η μάζα είναι ίση με $M/10$, πέφτει κατακόρυφα πάνω στη ράβδο με ταχύτητα V_0 , και στο σημείο Γ, που είναι στο μέσο της απόστασης OB. Αμέσως μετά, το (έξυπνο!) έντομο αρχίζει να κινείται προς το σημείο B, κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου να παραμένει σταθερή.



- (α) Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος ράβδου-εντόμου, ως προς το κέντρο της ράβδου, αμέσως πριν το έντομο ακουμπήσει τη ράβδο; Προσδιορίστε την ω συναρτήσει των V_0 και ℓ . Βρείτε επίσης τη γωνία περιστροφής της ράβδου, $\theta = \omega t$, ως προς την αρχική της θέση.
- (β) Όταν το έντομο βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο της ράβδου ($x > \ell/4$), ποιο είναι το μέτρο της στροφορμής του συστήματος ως προς το κέντρο της ράβδου, και ποιο το μέτρο της ροπής των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς το ίδιο σημείο; Δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των M , g , ω , και x ή t .
- (γ) Γράψετε τη διαφορική εξίσωση για την περιστροφική κίνηση του συστήματος ράβδου-εντόμου καθώς το έντομο κινείται. Βρείτε έτσι τη διαφορική εξίσωση για το $x(t)$.
Υπόδειξη: Ενώ η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή, η ροπή αδράνειας του συστήματος μεταβάλλεται με την απόσταση x του εντόμου από το κέντρο της ράβδου.
- Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον δεδομένο άξονα περιστροφής είναι $I = \frac{1}{12} M \ell^2$.

- Θέμα 4** Ένα διαστημόπλοιο, Α, αναχωρεί από τη Γη και κατευθύνεται προς το άστρο α του Κενταύρου, με σταθερή ταχύτητα. Η απόσταση του άστρου από τη Γη είναι 4 έτη φωτός. (1 έτος φωτός = η απόσταση που διανύει το φως σε ένα έτος = $1 \ell.y. = 9,45 \times 10^{15} \text{ m}$).
- (α) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, ώστε για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο το ταξίδι αυτό να διαρκέσει 4 έτη;
- (β) Πόσο διαρκεί το ταξίδι για έναν παρατηρητή στη Γη;
- (γ) Υποθέτουμε ότι παράλληλα με το διαστημόπλοιο Α, ένα δεύτερο διαστημόπλοιο Β επιστρέφει από τον α του Κενταύρου με ταχύτητα $c/\sqrt{2}$ ως προς τη Γη. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β όπως την μετρά ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;
- (δ) Αν το μήκος ηρεμίας του διαστημοπλοίου Β είναι $\ell_0 = 48 \text{ m}$, ποιο είναι το μήκος του όπως το μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;

Ερωτήματα για επιπρόσθετο βαθμό, πέραν των 10 μονάδων (0,5 μονάδα για κάθε θέμα)

- Θέμα 2** (ε) (i) Αν το σώμα έχει την ταχύτητα που βρέθηκε στο ερώτημα (γ) αλλά δεν έχει εκτοξευθεί ακριβώς προς το σημείο $r = 0$, τι είδους κίνηση θα κάνει; (ii) Στην περίπτωση του ερωτήματος (δ), ποια είναι η ταχύτητα του σώματος συναρτήσει της απόστασης r ;

- Θέμα 3** (δ) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα V_0 ώστε όταν το έντομο φθάσει στο σημείο Β η ράβδος να έχει περιστραφεί κατά 90° ;

Χρήσιμες σχέσεις

$$\int \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1+ax) + c \quad L = I\omega \quad \frac{dL}{dt} = N \quad E = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad \beta \equiv \frac{V}{c} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Μετασχηματισμός Lorentz: $x' = \gamma(x - Vt) \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$

Μετασχηματισμός ταχυτήτων: $v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}$