

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Αναλυτική Γεωμετρία & Γραμμική Άλγεβρα - 26/5/ 2007

Θέμα 1°

(i) Δίνονται οι υποχώροι V_1, V_2 του \mathbb{R}^3 , τέτοιοι ώστε: $\dim V_1 = \dim V_2 = 3$.

Να αποδείξετε ότι η τομή $V_1 \cap V_2$ των δύο υποχώρων δεν μπορεί να είναι ο μηδενικός υποχώρος.

(ii) Θεωρούμε τους υποχώρους του \mathbb{R}^3 : $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ και V_2 που παράγεται από τα διανύσματα $(1, 2, 1), (1, 2, -2), (2, 4, 3)$.

Να βρείτε από μια βάση και τις διαστάσεις των υποχώρων $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$.

Θέμα 2°

(α) Έστω ο υποχώρος $V = [(1, 1, 3, 2), (-1, 3, 1, 2), (1, -4, -2, -3)]$ του \mathbb{R}^4 και το

$$u = (0, \kappa, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4.$$

(i) Βρείτε ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το u να ανήκει στον υποχώρο V .

(ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο $U = \{(\kappa, \lambda, \mu) : u = (0, \kappa, \lambda, \mu) \in V \}$ είναι υποχώρος του \mathbb{R}^3 και να κατασκευάσετε μία βάση του.

(β) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε ότι και ο πίνακας

$$\text{adj}A \text{ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: } (\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \text{adj}(A^{-1}).$$

Θέμα 3°

Έστω $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y) = (3x - 2y, x + y, x - y).$$

(i) Να βρείτε μία βάση της εικόνας $\text{Im}T$.

(ii) Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς τις βάσεις $e = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$

(κανονική) του \mathbb{R}^2 και $\varepsilon = \{\varepsilon_1 = (1, 1, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 1), \varepsilon_3 = (0, 0, 1)\}$ του \mathbb{R}^3 .

Θέμα 4°

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ και $\varepsilon_1: \begin{cases} x - 2y + 3z - \alpha = 0 \\ y - 2z - \beta = 0 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) Να προσδιορίσετε τη θέση των δύο ευθειών για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β .

(ii) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 για $\alpha = -\beta = 2$.

(iii) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ε_1 και είναι κάθετο στο επίπεδο Π .

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία