

## ΟΜΑΔΑ Α

**ΘΕΜΑ 1:** Δίνεται το διανυσματικό πεδίο:  $F = (2y, 2x+z, 2z+y)$ .

A) Να αποδειχθεί ότι είναι πεδίο κλίσεων και να βρεθεί η πραγματική συνάρτηση  $f$  με  $\nabla f = F$  και  $f(1,1,1) = 5$ .

B) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int F \cdot dr$  στη καμπύλη  $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

**ΘΕΜΑ 2.** Δίνεται το διανυσματικό πεδίο  $F = (yz, xz - x, xy)$  και το τμήμα της σφαίρας

$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 2$  με θετική όψη την εξωτερική.

A) Να διατυπωθεί το θεώρημα Stokes και να επαληθευθεί για το διανυσματικό πεδίο  $F$  και την επιφάνεια  $S$ .

B) Να διατυπώσετε το θεώρημα Gauss και αν δίνεται ότι  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot ds = m$ , να βρεθεί, χωρίς

υπολογισμό το επιφανειακό ολοκλήρωμα  $\iint_S (\nabla \times F) \cdot \epsilon s$  στην εξωτερική όψη του τμήματος της σφαίρας

$S' : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \leq 2$ .

**ΘΕΜΑ 3:** A) Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου  $\tau$  ων περιβάλλεται από τα δύο παραβολοειδή  $z = 9 - x^2 - y^2$  και  $z = -27 + 3x^2 + 3y^2$ , φού το σχεδιάσετε.

B) Να υπολογίσετε με χρήση διπλού ολοκληρώματος το εμβαδόν του χωρίου που περιορίζεται από τις ευθείες:  $x + y = 2$ ,  $x + y = 4$ ,  $2x - y = 1$ ,  $2x - y = 3$ .

**ΘΕΜΑ 4:** A) Αν η  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια  $C^1$  τάξης συνάρτηση και  $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$  μια  $C^1$  τάξης καμπύλη με άκρα τα σημεία  $A(r(a))$  και  $B(r(b))$ , να δειχθεί ότι  $\int \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$ .

B) Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι αρμονική ( $\operatorname{div}(\nabla f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ ), να δειχθεί ότι για κάθε ομαλή κλειστή επιφάνεια  $S$  (σύνορο ενός χωρίου  $V$ ), ισχύει:  $\iint_S (D_n f) ds = 0$  (επιφανειακό A' είδους),

όπου  $\frac{\partial f}{\partial n} = D_n f$  η παράγωγος της  $f$  κατά τη κατεύθυνση του προς τα έξω κάθετου διανύσματος  $n$  της επιφάνειας  $S$ .

Τόποι:

Αν  $c$  καμπύλη και  $S$  επιφάνεια με παραμετρικές παραστάσεις  $r = r(t)$ ,  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  και  $r = r(u, v)$ ,  $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$  αντίστοιχα και  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  πραγματική συνάρτηση και  $F = (P, Q, R)$  διανυσματικό πεδίο  $C^1$  τάξης, τότε:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z), \quad \operatorname{div} F = \nabla \cdot F = P_x + Q_y + R_z, \quad \nabla \times F = \operatorname{rot} F = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y), \quad \frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot n$$

Επικαμπύλιο A' είδους:  $\int_C f ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt$

Επικαμπύλιο B' είδους:  $\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt$

Επιφανειακό A' είδους:  $\iint_S f dS = \iint_D f(r(u, v)) \|r_u \times r_v\| du dv$

Επιφανειακό B' είδους:  $\iint_S F \cdot dS = \iint_D F(r(u, v)) \cdot r_u \times r_v du dv$