ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Άσκηση 1: Αν *A,B* δύο nxn πίνακες, τέτοιοι ώστε $AB = BA$ να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό *k* ισχύει:

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^{k-i} B^i .$$

Άσκηση 2: Αν *A,B* δύο nxn συμμετρικοί πίνακες, να δειχθεί ότι $AB = BA$ αν και μόνον αν ο πίνακας AB είναι συμμετρικός.

Άσκηση 3: Έστω E_{ij} ο nxn πίνακας του οποίου το *ij*-στοιχείο είναι ίσο με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδενικά.

(α) Έστω *A* ένας nxm και *B* ένας mxn πίνακας. Πώς σχετίζονται οι πίνακες $E_{ij}A$ και BE_{ij} με τους *A* και *B* αντίστοιχα? Εφαρμόστε τα παραπάνω για τον $2x3$ πίνακα $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (δεξιά και αριστερά του).

(β) Έστω ο nxn στοιχειώδης διαγώνιος πίνακας Δ=diag(1,...,λ,...,1) και έστω *A* ένας nxm και *B* ένας mxn πίνακας. Πώς σχετίζονται οι πίνακες ΔA και $B\Delta$ με τους *A* και *B* αντίστοιχα? Εφαρμόστε τα παραπάνω για τον πίνακα Π του (α) (δεξιά και αριστερά του).

(γ) Έστω *A* ένας nxm πίνακας και έστω ο στοιχειώδης nxn πίνακας $I_n + \lambda E_{ij}$. Δείξτε ότι ο πίνακας $(I_n + \lambda E_{ij})A$ αντικαθιστά την *i*-γραμμή του *A* από το αθροίσματος με το *λ*-πολλαπλάσιο της *j*-γραμμής. Εφαρμόστε τα παραπάνω για τον πίνακα Π του (α).

(δ) Έστω *B* ένας mxn πίνακας. Βρείτε στοιχειώδη nxn πίνακα *S*, έτσι ώστε ο πίνακας *BS* να αντικαθιστά την *i*-στήλη του *B* από το άθροισμά της με το *λ*-πολλαπλάσιο της *j*- στήλης. Εφαρμόστε τα παραπάνω για τον πίνακα Π του (α).

(ε) Έστω *A* ένας nxm και *B* ένας mxn πίνακας. Βρείτε στοιχειώδη nxn πίνακα *L*, έτσι ώστε ο πίνακας *LA* να εναλλάσσει την *i*-γραμμή με την *j*-γραμμή του *A* ενώ ο πίνακας *BL* να εναλλάσσει την *i*-στήλη με την *j*-στήλη του *B*. Εφαρμόστε τα παραπάνω για τον πίνακα Π του (α) (δεξιά και αριστερά του).

Άσκηση 4: Να βρεθεί η συνθήκη και αναγκαία που πρέπει να ικανοποιούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα να έχει λύση:

$$\begin{aligned} x + y - z &= \alpha \\ 4x + y - 2z &= \beta \\ 6x + 3y - 4z &= \gamma \end{aligned}$$

Δώστε γεωμετρική ερμηνεία της λύσης.

Άσκηση 5: Ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος (Σ) είναι ο:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right)$$

Να εξετάσετε για ποιές τιμές των παραμέτρων α, β το (Σ):

(i) Έχει μοναδική λύση.
(ii) Έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων.
(iii) Έχει διπαραμετρική απειρία λύσεων.
(iv) Δεν έχει λύση.

Άσκηση 6: Έστω ένα μη ομογενές γραμμικό σύστημα Ax=b (Σ), με 4 αγνώστους και 4 εξισώσεις, και το αντίστοιχο ομογενές σύστημα Ax=0 (Ο).
(i) Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις γενικές λύσεις των (Σ) και (Ο) αν είναι γνωστό ότι οι πίνακες A και [A|b] είναι βαθμού 2;
(ii) Αν επιπλέον της συνθήκης του (i), είναι γνωστό ότι η γενική λύση του (Σ) είναι παράλληλη της γενικής λύσης του γραμμικού συστήματος:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 0 \\ y + 2z + 3w &= -1 \end{aligned}$$

και περιέχει το διάνυσμα (1,0,1,0), να υπολογίσετε τη γενική λύση του (Σ).

Άσκηση 7: Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ όπου } a, b \in \mathbb{R}.$$

(α) Δείξτε ότι: $A = bN + aI$, $N^3 = 0$, και ότι:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}$$

(β) Να υπολογισθεί ο αντίστροφος του A, όταν $a \neq 0$.

Άσκηση 8: Να υπολογιστεί ο πίνακας A αν γνωρίζουμε ότι όλα τα στοιχεία του είναι θετικά και ότι ο συμπληρωματικός (adjoint) πίνακας του A είναι ο:

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

Παράδοση: 5/12/2011

Σ. Λαμπροπούλου