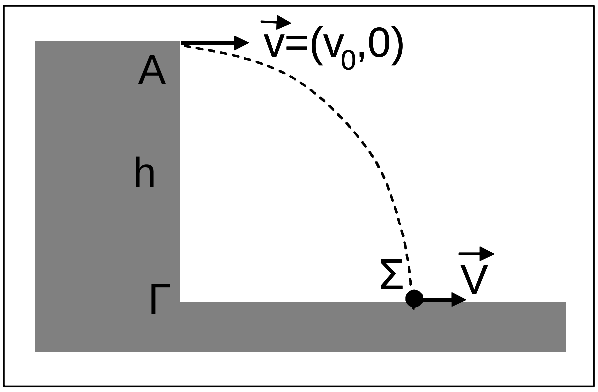
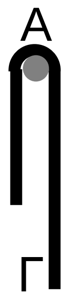
ΕΜΠ-ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ-ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ Ι – 1^{Ο} ΕΞΑΜΗΝΟ

Β' Σειρά ασκήσεων (Νόμοι Νεύτωνα) 2011-2012



Β.1 Από το σημείο Α σφαίρα βάλλεται οριζόντια, με ταχύτητα $\vec{v} = (v_0, 0)$, με σκοπό να πετύχει τον στόχο Σ που κινείται με ταχύτητα $\vec{V} = (v_1, 0)$, οριζόντια και σε κατακόρυφη απόσταση h από το Α. Ο στόχος Σ και η σφαίρα ξεκινούν ταυτόχρονα ($t = 0$) από τα σημεία Α και Γ αντίστοιχα. Η αντίσταση του αέρα, που θεωρούμε ότι επενεργεί μόνο στη σφαίρα, είναι ανάλογη με την ταχύτητα: $-k\vec{v}$ ($k > 0$). α) Γράψτε τη διανυσματική εξίσωση κίνησης για τη σφαίρα. β) Βρείτε τις v_x και v_y της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου. γ) Βρείτε τα $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας (θεωρώντας το σημείο Α ως αρχή των αξόνων). δ) Γράψτε τις σχέσεις που υπακούουν τα $x(t)$ και $y(t)$ υποθέτοντας ότι η σφαίρα συναντά τον στόχο κάποια χρονική στιγμή t_0. ε) Στην περίπτωση που ισχύει το (δ), δείξτε, απαλείφοντας όρους με εκθετικά, ότι η σφαίρα πετυχαίνει τον στόχο σε χρόνο:

$$t_0 = \frac{kh}{mg(1 - v_1/v_0)}$$



Β2. Λεπτό ομογενές σχοινί μάζας Μ και μήκους L τοποθετείται γύρω από ένα λείο ξυλόκαρφο πολύ μικρής ακτίνας (βλ. σχήμα). Όταν ξεκινά η κίνηση το (ΑΓ)=b (b>L/2). Βρείτε την επιτάχυνση και την ταχύτητα του σχοινιού όταν το (ΑΓ)=2L/3.

Β.3 Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Το επίπεδο xy είναι οριζόντια λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο σημείο (0, 0) και έχει ταχύτητα $\mathbf{\upsilon}_0$ η οποία σχηματίζει γωνία 45^{o} με τον άξονα x. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι μία δύναμη τριβής, $-mk\upsilon_y\hat{\mathbf{y}}$, ανάλογη της συνιστώσας υ_y της ταχύτητάς του, όπου k είναι ένας σταθερός θετικός συντελεστής. (α) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σωματιδίου; (β) Βρείτε την ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου. (γ) Ποια είναι η εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει το σωματίδιο στο επίπεδο xy; (δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή y_m του y στην τροχιά;

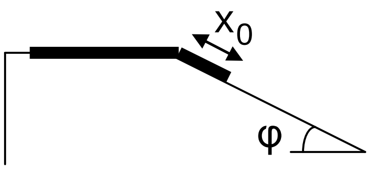
Απαντήσεις: β) $\upsilon_x = \upsilon_0/\sqrt{2}, \quad \upsilon_y = (\upsilon_0/\sqrt{2})e^{-kt}$, γ) $y = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}\left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,k}{\upsilon_0}x\right)\right]$, δ) $y_m = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}\,k}$

Β.4 Σφαίρα μάζας m εκτοξεύεται από το σημείο (0, 0) με αρχική ταχύτητα $\mathbf{\upsilon}_0$ που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x, ο οποίος είναι οριζόντιος. Ο άξονας y είναι κατακόρυφος. Η σφαίρα κινείται στο επίπεδο xy. Το σημείο βολής βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Κατά την κίνησή της η σφαίρα υφίσταται αντίδραση $-b\mathbf{\upsilon}$ από την ατμόσφαιρα, όπου $\mathbf{\upsilon}$ είναι η ταχύτητα της σφαίρας και b μια θετική σταθερά. (α) Βρείτε τις συναρτήσεις $\upsilon_x(t)$ και $\upsilon_y(t)$ κατά την κίνηση της σφαίρας. (β) Βρείτε τις συντεταγμένες $x(t)$ και $y(t)$ της σφαίρας. (γ) Γράψετε την εξίσωση που προσδιορίζει την τιμή του χρόνου τ όταν η σφαίρα προσκρούει στο έδαφος, χωρίς να επιχειρήσετε να τη λύσετε. (δ) Δείξτε ότι για $\tau >> m/b$ ο χρόνος αυτός είναι $\tau \approx \frac{hb}{mg} + \frac{\upsilon_0}{g}\sin\theta$.

B5. Μοτοσικλέτα μάζας m κινούμενη στην ύπαιθρο με ταχύτητα v_0 πέφτει πάνω σε σωρό με άχυρο, πάχους d και τον διαπερνά. Αν η δύναμη τριβής μέσα στο σωρό είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας ($-kv^2$) (και θεωρήσουμε ότι η μηχανή έσβησε μόλις μπήκε στα άχυρα), να υπολογισθούν: α) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση του χρόνου, β) η ταχύτητα της μοτοσικλέτας ως συνάρτηση της απόστασης x που διανύει μέσα στο άχυρο και γ) ο χρόνος που χρειάζεται η μοτοσικλέτα να περάσει από τον σωρό (*Ευτυχώς, ο μοτοσικλετιστής πέρασε σώος και αβλαβής*).

B.6 **Σ**ώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{\mathbf{y}}$ $(V>0)$ κατά μήκος του άξονα των y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι $y=0$. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά. (α) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος. (β) Δείξτε ότι τα υ και y ικανοποιούν τη σχέση $y=\dfrac{V-\upsilon}{k}-\dfrac{g}{k^2}\ln\left(\dfrac{1+kV/g}{1+k\upsilon/g}\right)$. (γ) Βρείτε το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα. Απ.: $H=\dfrac{V}{k}-\dfrac{g}{k^2}\ln\left(1+\dfrac{kV}{g}\right)$

B.7 Θεωρούμε βάρκα με μάζα m, που κινείται προς τα δεξιά (v>0) με αρχική ταχύτητα $v_0>0$. Η αντίσταση από το νερό θεωρούμε ότι δίνεται από τη σχέση F = - k v^2, όπου το k είναι θετική σταθερά. Να βρεθεί η ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου, καθώς και το διάστημα που θα διανύσει η βάρκα στο χρονικό διάστημα από 0 μέχρι T. Ποιά είναι η προσεγγιστική έκφραση για το διάστημα που θα διανυθεί για μικρούς χρόνους, δηλαδή
αν $T << m/(k\, v_0)$;



B.8 Ομογενής αλυσίδα συνολικού μήκους L και μάζας M είναι τοποθετημένη έτσι ώστε τη χρονική στιγμή t=0 τμήμα της μήκους x_0 να βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ. Αν δεν υπάρχουν τριβές βρείτε την ταχύτητα την οποία έχει αποκτήσει η αλυσίδα όταν βρίσκεται πια εξ ολοκλήρου στο κεκλιμένο επίπεδο.

B.9 Ένα σώμα έχει μάζα m, βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση $y=0$ και αρχίζει να πέφτει κατακόρυφα (κατά μήκος του άξονα y, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω). Η δύναμη της τριβής του αέρα είναι ίση με $-b\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$, όπου $\vec{\boldsymbol{\upsilon}}$ η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά. (α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος, υ, ως συνάρτηση του χρόνου. (β) Δείξτε ότι η ταχύτητα τείνει σε μια ορική τιμή και βρείτε την τιμή αυτή. (γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος, y, ως συνάρτηση του χρόνου. (δ) Αναπτύξτε τις απαντήσεις για τα $y(t)$ και $\upsilon(t)$ σε σειρές δυνάμεων του χρόνου, για να βρείτε σχέσεις που ισχύουν για μικρές τιμές του t. Δίνεται το ανάπτυγμα: $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$.

Απαντήσεις: α) $\upsilon=-\dfrac{mg}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$, β) $\upsilon_{o\rho}=-\dfrac{mg}{b}$, γ) $y=-\dfrac{m^2g}{b^2}\left[\dfrac{b}{m}t-\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right]$,

δ) $y\approx-\tfrac{1}{2}gt^2+\tfrac{1}{6}g\dfrac{b}{m}t^3,\quad \upsilon\approx-gt+\tfrac{1}{2}g\dfrac{b}{m}t^2$

ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ ΟΙ ΣΗΜΕΙΩΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ B1, B2, B3, B5 & B6
ΤΕΛΙΚΗ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ: 23/11/2011