ΕΜΠ-ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ-ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΦΥΣΙΚΗ Ι – 1^Ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΧΟΛΗΣ ΕΜΦΕ

Α' Σειρά ασκήσεων (Κινηματική) **2011-2012**

Α.1 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σώματος με μάζα 100kg είναι $r(t) = 16t\hat{x} + 25t^2\hat{y} + 33\hat{z}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθούν: α) η ταχύτητα του σώματος και η επιτάχυνσή του. β) η ορμή του και η δύναμη που ασκείται στο σώμα. γ) η στροφορμή του και η ροπή της δύναμης ως προς την αρχή των αξόνων.

Α.2 Εστω ότι το διάνυσμα θέσης ενός κινητού περιγράφεται από τη συνάρτηση $\bar{r} = \bar{r}(t)$ και ότι s είναι το μήκος της τροχιάς, όπως το μετράμε με αφετηρία κάποιο σημείο αναφοράς της τροχιάς. Ορίζουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{T}, \hat{N}$, το μεν $\hat{T}$ εφαπτομενικό στην τροχιά, κατά τη φορά της κίνησης, το δε $\hat{N}$ κάθετο στο $\hat{T}$ κατά τη φορά του $d\hat{T}/dt$ (ή του $d\hat{T}/ds$). Δείξτε ότι τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης γράφονται ως εξής: $\bar{v} = v\hat{T}$ και $\bar{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} + \frac{v^2}{\rho}\hat{N}$,

όπου $\frac{1}{\rho} = k = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$, η τοπική καμπυλότητα της τροχιάς και ρ η τοπική ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς. Οι δυο συνιστώσες της επιτάχυνσης είναι η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση, αντίστοιχα.

Α.3 Η θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα των x δίνεται, ως συνάρτηση του χρόνου t, από τη σχέση: $x(t) = 2 + 3t + 4e^{-5t}$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου και η επιτάχυνσή του. Δείξτε ότι η ταχύτητα του σημείου τείνει σε μια σταθερή τιμή.

Α.4 Οι συντεταγμένες ενός σημείου που κινείται πάνω στο επίπεδο xy δίνονται, συναρτήσει του χρόνου t, από τις σχέσεις: $x(t) = 3\sin 5t$, $y(t) = 4\cos 5t$ (σε m όταν ο χρόνος είναι σε s).
Να βρεθούν:
(α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(β) Τα μέτρα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου.
(γ) Η εξίσωση της τροχιάς του σημείου.

Α.5 Αν $\mathbf{r}(t) = (3+t)\,\hat{\mathbf{x}} + \cos 2t\,\hat{\mathbf{y}} + 2e^{-2t}\,\hat{\mathbf{z}}$, να βρεθούν τα $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$ και $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}$, καθώς και οι αρχικές τιμές (για $t = 0$) $\mathbf{r}(0)$, $\dot{\mathbf{r}}(0)$ και $\ddot{\mathbf{r}}(0)$ των τριών διανυσμάτων.

Α.6 Να βρεθούν οι παράγωγοι του διανύσματος $\mathbf{r}(t) = \left(x_0\,\hat{\mathbf{x}} + y_0\,\hat{\mathbf{y}}\right) + \upsilon_0 t\,\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{\mathbf{z}}$ ως προς t, αν όλα τα άλλα μεγέθη είναι σταθερά. Επίσης να βρεθούν οι τιμές τους για $t = 0$.

Α.7 Δύο σωματίδια με μάζες *m* και *2m,* κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{r}_1 = (3t + 2t^2)\,\hat{x} + (4 + 4t^2)\,\hat{y} + (5 + 2t)\,\hat{z} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{r}_2 = (20 - t - t^2)\hat{\mathbf{x}} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{\mathbf{y}} + (1 + 4t)\hat{\mathbf{z}}$$

αντίστοιχα, όπου *t* = χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).
(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. Απ.: $\tau = 2$ s
(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; Απ.: $\mathbf{F}_{ολ} = \mathbf{0}$
(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι; Απ.: $\mathbf{P}_{ολ} = m(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}})$
(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{3}\left(40\hat{\mathbf{x}} + 24\hat{\mathbf{y}} + 7\hat{\mathbf{z}}\right) + \frac{1}{3}t\left(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}}\right)$$

A.8 Σώμα μάζας *m* κινείται σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις συντεταγμένες του σώματος: $x = 3a\sin\omega t$, $y = 4a\sin\omega t$, $z = 5a\cos\omega t$, όπου t = χρόνος, και ω και a είναι θετικές σταθερές. Αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη, δείχνοντας ότι σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3, τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ είναι συνεπίπεδα. Συνθήκη: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = 0$.

A.9 Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a\cos(\omega t), \qquad y = a\sin(\omega t), \qquad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και a, b και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$, η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ και η επιτάχυνση $\boldsymbol{\gamma}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

(β) Αν Κ είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των Z που έχει διάνυσμα θέσης $\mathbf{c} = z\hat{\mathbf{z}} = bt^2\hat{\mathbf{z}}$, και $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο Κ στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\mathbf{R}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο Κ ή τον άξονα των Z είναι σταθερή.

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\mathbf{F}$ που ασκείται πάνω στη μάζα. Δείξετε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο Κ, και μία σταθερή στην κατεύθυνση Z. Απ.: $\mathbf{F} = -m\omega^2 R\hat{\mathbf{R}} + 2mb\,\hat{\mathbf{z}}$

(δ) Υπολογίστε τον στιγμιαίο ρυθμό παραγωγής έργου από τη δύναμη, $P = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\upsilon}$, και δείξτε ότι εξαρτάται μόνο από την κίνηση στην κατεύθυνση Z. Απ.: $P = 4mb^2 t$

A.10 Δίνεται ότι: $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$ για κάθε *x*. Να υπολογιστεί η τιμή του $e^{0,1}$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Πόσο είναι το σφάλμα στο $e^{0,1}$ αν υποθέσουμε ότι είναι $e^x \approx 1 + x$;

Απ.: $e^{0,1} = 1{,}105, \quad 0{,}0052$

A.11 Να βρεθεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες η *ροπή* της δύναμης $\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}$ ως προς το σημείο (0, 0, 0), $\mathbf{N} \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{F}$. Απ.: $\mathbf{N} = (yF_z - zF_y)\hat{\mathbf{x}} + (zF_x - xF_z)\hat{\mathbf{y}} + (xF_y - yF_x)\hat{\mathbf{z}}$

A.12 Το διάνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι $\mathbf{r} = bt\hat{\mathbf{x}} - ct^2\hat{\mathbf{y}}$, όπου t είναι ο χρόνος και b, c θετικές σταθερές. Να βρεθούν: (α) Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου. (β) Η ταχύτητα του σωματιδίου $\boldsymbol{\upsilon}$ και η επιτάχυνσή του $\boldsymbol{\gamma}$, καθώς και τα μέτρα τους. (γ) Η γωνία μεταξύ των $\boldsymbol{\upsilon}$ και $\boldsymbol{\gamma}$, ως συνάρτηση του χρόνου.(δ) Το μήκος της διαδρομής που διανύει το σωματίδιο στο χρονικό διάστημα μεταξύ $t = 0$ και $t = b/2c$.

Δίνεται: $\int_0^1 \sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right] = 1{,}15$.

A.13 Η ροπή μιας δύναμης ως προς το σημείο Ο ορίζεται ως $\mathbf{N} \equiv \mathbf{r}\times\mathbf{F}$, όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα από το Ο στο σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη Να δειχθεί ότι η ροπή δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων $\mathbf{F}$ και $-\mathbf{F}$ που ασκούνται στα σημεία $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ αντίστοιχα (ζεύγος δυνάμεων), είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

A.14 Η *στροφορμή* ως προς το σημείο (0, 0, 0) μιας μάζας m που βρίσκεται στο σημείο $\mathbf{r}$ και κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, ορίζεται ως $\mathbf{L} \equiv m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$. Έστω ότι η μάζα υφίσταται μια *κεντρική* δύναμη, δηλαδή μια δύναμη της μορφής $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$, όπου $f(r)$ είναι μια συνάρτηση μόνο της απόστασης r από το κέντρο (0, 0, 0) και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\mathbf{r}(t)$. Δείξτε ότι η στροφορμή της μάζας διατηρείται σταθερή.

[*Υπόδειξη*: Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς τον χρόνο είναι $d\mathbf{L}/dt = 0$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα $m\,d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο C. Kittel κ.ά., *Μηχανική*, σελ. 197-8.]

ΟΙ ΣΗΜΕΙΩΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ ΚΑΙ ΝΑ ΠΑΡΑΔΟΘΟΥΝ ΩΣ ΤΙΣ 4/11/2011