ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (Θέματα Εξέτασης Σεπτεμβρίου 2012)

ΕΜΠ - Τομέας Φυσικής - ΣΕΜΦΕ, Αναπλ. Καθ. Γ. Βαρελογιάννης

Μέρος Α:

Α.1: Απαντήστε πολύ συνοπτικά τα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Γιατί ειπισέρχονται οι **πολλαπλασιαστές** *Lagrange* στη Στατιστική Φυσική ;

β) Πόσοι πολλαπλασιαστές *Lagrange* ειπισέρχονται σε ένα στατιστικό σύστημα ;

γ) Ποιό είναι το φυσικό νόημα ενός πολλαπλασιαστή *Lagrange* ;

δ) Αν λ_1 ένας πολλαπλασιαστής *Lagrange* ενος συστήματος. Ποιός θα είναι ο αντίστοιχος πολλαλασιαστής *Lagrange* ενός ζεύγους δύο όμοιων τέτοιων συστημάτων. Σχολιάστε.

Α.2: Εστω **Στατιστικό Μείγμα** Ν κβαντικών καταστάσεων $|\Psi_i\rangle$ με αντίστοιχη πιθανότητα P_i. Θεωρούμε εδώ ότι $\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle = \delta_{i,j}$.

α) Υπενθυμίστε τηλεγραφικά τα αξιώματα της κβαντομηχανικής τα οποία υπακούουν οι καθαρές κβαντικές καταστάσεις $|\Psi_i\rangle$.

β) Δείξτε ότι ορίζοντας $\widehat{\rho} = \sum_i P_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$ η μέση τιμή μιας ποσότητας $\widehat{A}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\langle\widehat{A}\rangle = Tr\{\widehat{\rho}\widehat{A}\}$$

Α.3: Εστω ένα σύστημα τριών ανεξάρτητων και μή αλληλεπιδρόντων σωματιδίων με σπίν 1/2. Ο προσπελάσιμος χώρος *Hilbert* του πρώτου σωματιδίου έχει δύο διαστάσεις, του δεύτερου σωματιδίου έχει τέσσερις διαστάσεις και του τρίτου σωματιδίου δύο διαστάσεις. Ποιά θα είναι η διάσταση του χώρου καταστάσεων του συστήματος των τριών σωματιδίων. Μετά την εφαρμογή ενός μαγνητικού πεδίου ποιά θα είναι η διάσταση του χώρου αυτού ; Γιατί ;

Α.4: Δείξτε ότι αν $\widehat{X}_i$ μια διατηρήσιμη ποσότητα με αντίστοιχο πολλαπλασιαστή *Lagrange* λ_i και $\widehat{A}$ μια ποσότητα που προκύπτει από την $\widehat{X}_i$ μετά από πρώτη παραγώγισή της ως προς μια παράμετρο ξ, τότε για τη μέση τιμή της $\widehat{A}$ έχουμε:

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\frac{\partial\hat{X}_i}{\partial\xi}\rangle = -\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\left(\mathcal{Z}\left\{\lambda_i\right\}\right) \qquad (0.1)$$

Α.5: Γιατί το όριο $J \to \infty$ μιας κβαντικής μαγνητικής ροπής J ονομάζεται **κλασσικό όριο** ; Να δείξετε παραθέτοντας τις πράξεις ότι κλασσικό όριο της συνάρτησης *Brillouin*

$$\mathcal{B}_J(x) = \frac{2J+1}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{x}{2J}\right)$$

είναι η συνάρτηση *Langevin*. Τι αναπαριστά η συνάρτηση αυτή ;

Α.6: Πειραματικές μετρήσεις μας δίνουν την εξάρτηση της μαγνήτισης με τη θερμοκρασία κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία μιας **σιδηρομαγνητικής** μετάβασης τάξης. Απο τις μετρήσεις αυτές προκύπτει ότι η μαγνήτιση περνάει **ασυνεχώς** απο το μηδέν σε μια πεπερασμένη τιμή στην κρίσιμη θερμοκρασία. Να δώσετε την πιο γενική συναρτησιακή *Landau* που περιγράφει την ελεύθερη ενέργεια συναρτήσει της παραμέτρου τάξης που αντιστοιχεί στη μετάβαση αυτή. Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η συναρτησιακή *Landau* μπορεί να έχει τη συγκεκριμένη μορφή.

Α.7: Φοιτητές της ΣΕΜΦΕ παρήγαγαν πρωτοποριακό υλικό το οποίο δείχνει μια ματάβαση από μια σιδηρομαγνητική κατάσταση σε μια υπεραγώγιμη κατάσταση και αντίστροφα σαν συνάρτηση του ηλεκτρικού πεδίου. Μπορούν να κατασκευάσουν μι-α θεωρία *Landau* με μια μόνον παράμετρο τάξης για να μοντελοποιήσουν τη μετάβαση αυτή ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μέρος Β:

Θεωρούμε σωματίδια το καθένα από τα οποία έχει **3 προσπελάσιμες καταστάσεις** με αντίστοιχες **ιδιοτιμές της ενέργειας 0, E** και **2E**.

Β.1: Αν έχουμε ζεύγος τέτοιων σωματιδίων, να βρεθεί η **συνάρτηση επιμερισμού** και ο **τελεστής πυκνότητας** όταν τα δύο σωματίδια του ζεύγους είναι:
α) διακριτά
β) ταυτόσημα **μποζόνια**
γ) ταυτόσημα **φερμιόνια**
Κατατάξτε τις συναρτήσεις επιμερισμού που προέκυψαν στα **α)**, **β)** και **γ)** ως προς το μέγεθός τους όταν $T > 0$ $(E > 0)$. Ποιά η διαφορά όταν $T = 0$; Σχολιάστε.

Β.2: Θεωρούμε ένα σύνστημα που αποτελείται από N διακριτά **ζεύγη** τέτοιων σωματιδί-ων σε θερμική ισορροπία. Να βρείτε το μέσο αριθμό των **ζευγών** των οποίων **η ενέργεια είναι 2E** για τις περιπτώσεις **α)**, **β)**, και **γ)** του ερωτήματος **Β.1:**.

Β.3: Αν έχουμε N_{2E} διακριτά ζεύγη των οποίων η ενέργεια είναι 2E, να υπολογίσετε την **εντροπία** του συστήματος των ζευγών αυτών για τις περιπτώσεις **α)**, **β)**, και **γ)** του ερωτήματος **Β.1:**. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

Μέρος Γ:

Θεωρούμε πάλι τα ζεύγη που ορίστηκαν στο **Μέρος Β:**. Κάθε διακριτό ζεύγος μπορεί τώρα να μετακινηθεί μέσα σε πεδίο **τρισδιάστατου ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή** το οποίο δεν επηρεάζει τα εσωτερικά ενεργειακά επίπεδα του ζεύγους. (Οι χώροι *Hilbert* των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας του ζεύγους και των ταλαντώσεων του ζεύγους είναι ανεξάρτητοι)

Γ.1: Να υπολογίσετε υπό αυτές τις συνθήκες τη Συνάρτηση Επιμερισμού Z και την Εσωτερική Ενέργεια U ενός συστήματος N διακριτών ζευγών που αποτελούνται από ταυτόσημα **φερμιόνια**.
Σχολιάστε τη διαφορά με την περίπτωση αρμονικών ταλαντωτών χωρίς τους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας και το όριο $T \to 0$.

Γ.2: Να υπολογίσετε τη θερμοχωρητικότητα $C = dU/dT$ του συστήματος που αποτελεί-ται από N_{2E} ανεξάρτητους τρισδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές **ζευγών φερμιονί-ων ενέργειας 2E** όπως οι παραπάνω. Παίρνοντας τα όρια $T \to 0$ και $T \to \infty$ δώστε ένα διάγραμμα $C(T)$ και σχολιάστε. Εαν είχαμε N_{2E} ζεύγη **μποζονίων** ενέργειας 2E η θερμοχωρητικότητα θα ήταν μεγαλύτερη, μικρότερη, ή ίση (Σχολιάστε χωρίς πράξεις).