



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ»

29 Αυγούστου 2012

ΘΕΜΑ 1^ο.

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = -z+2$ και η οικογένεια επιπέδων με εξίσωση

$$\Pi_\lambda: 2x+3y+\lambda z-\lambda-12=0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (i) Βρείτε το κοινό σημείο της ε με το επίπεδο $\Pi_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 1*
- (ii) Για ποια τιμή του λ η ευθεία ε είναι κάθετη στο επίπεδο Π_λ ; *Μονάδες 0,5*
- (iii) Για $\lambda=1$, να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Q που περιέχει την ευθεία ε και είναι κάθετο προς το επίπεδο Π_1 . *Μονάδες 1*

ΘΕΜΑ 2^ο

(α) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων a, b για να είναι συμβιβαστό το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x-2y+4z+8w &= a \\ 2x-3y+6z+14w &= b \\ 2x-5y+10z+18w &= 0 \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

και στη συνέχεια να λύσετε το σύστημα (Σ) για $a=1, b=4$.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 3^ο

(Α) Έστω $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $T(1,1,1,1) = (1,1,0)$ και με πίνακα ως προς την κανονική βάση του κάθε χώρου

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & k \\ k & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

- (i) Να αποδείξετε ότι είναι $k=1$ και κατόπιν να βρείτε τον τύπο της T . *Μονάδες 1*
- (ii) Να βρείτε μία βάση της εικόνας $\text{Im } T$ της T . *Μονάδες 0,5*

(Β) Να αποδείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $f: X \rightarrow Y$ είναι 1-1, αν, και μόνον αν, $\ker f = \{0\}$.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+4y-3z=0\}$.

- (i) Βρείτε υπόχωρο W_2 του \mathbb{R}^3 , τέτοιο ώστε $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ και επαληθεύστε τον τύπο των διαστάσεων.
- (ii) Βρείτε μία βάση του \mathbb{R}^3 με στοιχεία από τους χώρους W_1, W_2 .
- (iii) Κατασκευάστε μία γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που να έχει εικόνα τον W_1 .

Μονάδες 2,5

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

Καλή επιτυχία